مذكرة

الجبر: الدوال الحقيقية

الصف الثانى الثانوى

القسم العلمى

الفصل الدراسى الأول ٢٠٢٠

الدوال الحقيقية ورسم الدوال

- الدوال الحقيقية
- اطراد الدوال
- العمليات على الدوال - تركيب دالتين
- الدالة الزوجية - والدوال الفردية - الدوال الأحادية
- التمثيل البيانى للدوال والتحويلات الهندسية
- حل المعادلات ومتباينات القيمة المطلقة

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

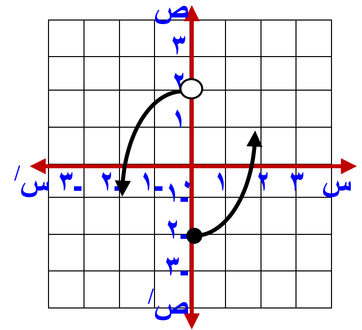
مجـــــال الدالـــــــة

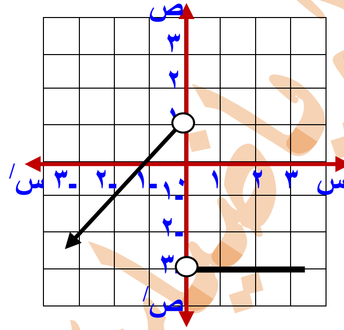
* إذا كانت سـ، صـ مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من المجموعة ع فإن العلاقة من سـ إلى صـ تسمى دالة إذا ارتبط كل عنصر من سـ بعنصر واحد فقط من صـ ، تسمى سـ مجال الدالة ، صـ المجال المقابل لها

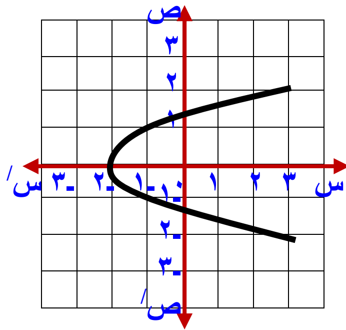
* مدى الدالة هو مجموعة صور عناصر المجال ، وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل.

* العلاقة لا تمثل دالة إذا وجد مستقيم واحد على الأقل يوازى محور الصادات ويقطع الشكل البيانى للدالة فى أكثر من نقطة

مثــ١ــال :أى من الأشكال يمثل دالة وأى لا يمثل دالة

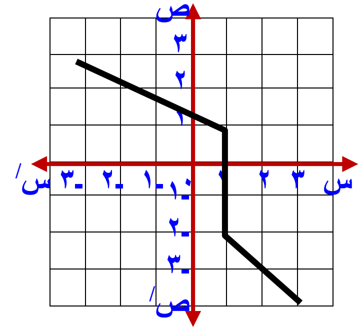


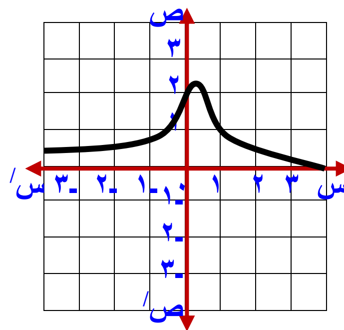


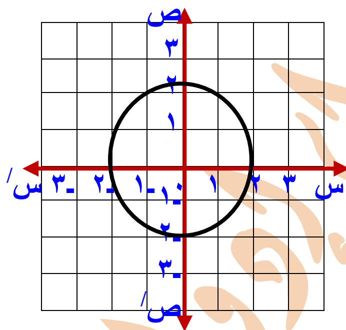


يمثل دالة لأن كل عنصر فى المجال له صورة واحدة على الأكثر	يمثل دالة لأن كل عنصر فى المجال له صورة واحدة على الأكثر	لا يمثل دالة لأن كل قيمة حقيقية للمتغير سـ يناظرها قيمتان مختلفتان صـ

مثــ٢ــال بين أياً من الأشكال البيانية يمثل دالة أيها لا







لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسى عند النقطة ١ ∋ المجال يقطع المنحنى فى أكثر من نقطة	يمثل دالة لأن كل خط رأسى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة على الأكثر	لا يمثل دالة لأن يوجد خط مستقيم // محور الصادات يقطع الشكل البيانى فى أكثر من نقطة

تحديد مجال الدالة الحقيقية

[١] <u>مجال الدالة كثيرة الحدود:</u> هو ع مالم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها

[٢] <u>مجال الدالة الكسرية</u> : هو ع ـ مجموعة أصفار المقام

[٣] <u>مجال الدالة الجذرية :</u> إذا كانت : د (س) = $\sqrt[ن]{هـ(س)}$ حيث ن ∈ ص⁺

!) عندما: (ن) عدد فردى فإن مجال الدالة = ع

!!) عندما (ن) عدد زوجى فإن مجال الدالة هو مجموعة قيم س بشرط هـ (س)⩾ ٠

مثـــ١ـــال: عين مجال الدالة : د(س) = س^{٣} ــ ٥ س + ٤

الدالة كثيرة الحدود ∴ مجال الدالة هو ع

مثـــ٢ـــال: عين مجال الدالة : د(س) = $\frac{\text{س ـ ٣}}{\text{س}^{٢}\text{ ـ ٩}}$

الدالة الكسرية الجبرية : مجالها = ع ـ { أصفار المقام }

بوضع المقام = ٠ ⟸ س^{٢} ـ ٩ = (س ـ٣)(س +٣) = ٠ ⟸ س = ٣ أ، ـ٣

∴ مجال الدالة = ع ـ {-٣ ، ٣}

مثـــ٣ـــال: عين مجال الدالة : د(س) = ٥ + $\sqrt{\text{س ـ ٣}}$

الدالة على صورة دالة جذرية : د(س) = $\sqrt{\text{ر(س)}}$

مجالها جميع الأعداد الحقيقية التى تجعل ر(س) ⩾ صفر (ما تحت الجذر ⩾ صفر)

مجال الدالة = { س : س∈ ع ، س ـ ٣ ⩾ ٠}

= { س : س ∈ ع ، س ⩾ ٣ } = [٣ ، ∞ [

مثـــ٤ـــال: عين مجال الدالة : د(س) = $\frac{\text{س}^{٢}\text{ + ٢س}}{\text{س}^{٢}\text{ ـ ٥س +٦}}$

الدالة الكسرية الجبرية : مجالها = ع ـ { أصفار المقام }

بوضع المقام = ٠ ⟸ س^{٢} ـ ٥س +٦ = (س ـ٢)(س ـ٣) = ٠ ⟸ س = ٢ أ، ٣

∴ مجال الدالة = ع ـ {٢ ، ٣}

مثـ٥ـال: عين مجال الدالة : د(س) = $\sqrt[3]{\text{س} + ٨}$

الدالة على صورة دالة جذرية : د(س) = $\sqrt[3]{\text{ر(س)}}$

مجالها جميع الأعداد الحقيقية مجال الدالة هو ع

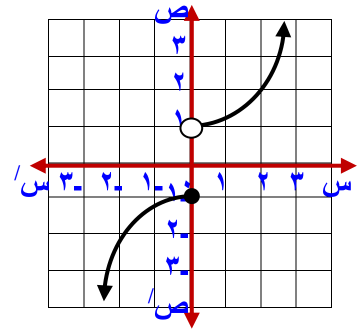
مثـ٦ـال: عين مجال الدالة : د(س) = $\frac{\text{س}٢}{\text{س}^{٢} + ٤}$

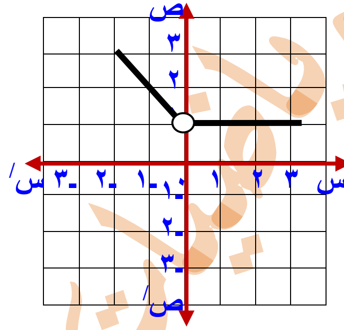
الدالة الكسرية الجبرية : مجالها = ع ـ { أصفار المقام }

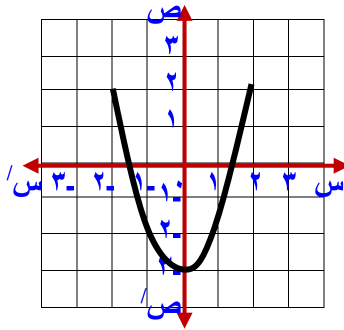
بوضع المقام = ٠ ⟸ س^{٢} + ٤ ⟸ س^{٢} = ـ ٤ ⟸ ليس لها حل فى ع

∴ مجال الدالة هو ع

مثـــــ٧ـــــال :عين مجال ومدى كل من الدوال الممثلة







المجال = ع المدى = ع ـ]١ ، ـ١[	المجال = ع ـ {٠} المدى =]١ ، ٣[	المجال = [ـ٢ ، ٢] المدى = [ـ٣ ، ٢]

العمليات على الدوال

إذا كانت : د١ ، د٢ دالتين مجالهما م١ ، م٢ على الترتيب فإن:

- (د١ ± د٢) (س) = د١ (س) ± د٢ (س) ⟸ حيث مجال (د١ ± د٢) هو م١ ∩ م٢
- (د١ × د٢) (س) = د١ (س) × د٢ (س) ⟸ حيث مجال (د١ ± د٢) هو م١ ∩ م٢
- ($\frac{\text{د}_١}{\text{د}_٢}$) (س) = $\frac{\text{د}_١ \text{(س)}}{\text{د}_٢ \text{(س)}}$

حيث مجال ($\frac{\text{د}_١}{\text{د}_٢}$) هو م١ ∩ م٢ ـ مجموعة أصفار د٢

مثـــ٨ـــال : عين مجال د(س) = $\sqrt{س - ٣}$ + $\sqrt{٥ - س}$

الحـــــــــــل

مجال الدالة = $\sqrt{س - ٣}$ م١ = { س : س ∋ ح ، س - ٣ ⩾ ٠ } = [٣ ، ∞ [

مجال الدالة = $\sqrt{٥ - س}$ م١ = { س : س ∋ ح، ٥ - س ⩾ ٠} =] - ∞ ، ٥]

مجال الدالة = م١ ∩ م٢ = { س : س ∋ ح ، س ⩾ ٣ ، س ⩽ ٥ } = [٣ ، ٥]

مثـــ٩ـــال : عين مجال د(س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٣}$

الحـــــــــــل

مجال البسط م١ = { س : س ∋ ح ، س - ٢ ⩾ ٠} = [٢ ، ∞ [

مجال المقام م٢ = ح - ٣

مجال الدالة = م١ ∩ م٢ - { أصفار المقام}

= { س : س ∋ ح ، س - ٢ ⩾ ٠} - { ٣ } = [٢، ∞ [- { ٣ }

مثـــ١٠ـــال : عين مجال د(س) = $\frac{س + ٥}{\sqrt{س + ١}}$

الحـــــــــــل

مجال البسط = م١ = ح ، مجال المقام =م٢= { س : س ∋ ح ، س +٢ > ٠}

مجال الدالة = { س : س ∋ ح ، س ⩾ - ١} =] - ١، ∞ [

مثـــ١١ـــال : عين مجال د(س) = $\sqrt{س -٢}$ + $\frac{١}{\sqrt{٨ - س^٢}}$

الحـــــــــــل

م١ = { س : س ∋ ح ، س - ٢ ⩾ ٠ } = [٢ ، ∞ [

م٢ = { س : س ∋ ح ، ٨ - س٢ > ٠} =] - ∞ ، ٤[

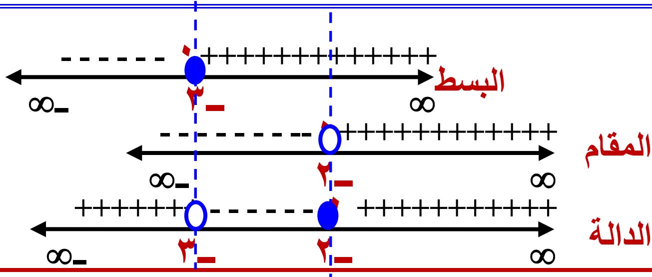
مجال الدالة = م١ ∩ م٢ = [٢ ، ا [∩] - ا، ٤[= [٢ ، ٤ [

مثـــ١٢ـــال :عين مجال د(س) = $\sqrt{\frac{س + ٣}{س + ٢}}$

الحـــــــل

مجال الدالة هو] −٢ ، ∞ [∪] −∞ ، −٣[

= ح − [−٣ ، −٢]



تركيب دالتين

إذا كانت : د ، ر دالتين فإن تركيب الدالة د مع الدالة ر ينتج دالة جديدة يرمز لها بالرمز (د ∘ ر) وتقرأ د تركيب ر أو(د بعد ر) ويكون (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

وتطبق قاعدة الدالة ر أولاً ثم قاعدة الدالة د

❖ لتعيين مجال الدالة: د ∘ ر نتبع الخطوات التالية

(١) نوجد م١ = مجال الدالة ر(س)

(٢) نوجد م٢ = قيم س التى تجعل ر(س) فى مجال د

(٣) نوجد م١ ∩ م٢ وهو مجال د ∘ ر

❖ (د ∘ ر)(س) ≠ (ر ∘ د)(س) عملية تركيب دالتين ليست عملية إبدالية

مثـــ١٣ـال :إذا كانت: د(س) = ٢س + ٣ ، ر(س) = س٢ + ١ فأوجد كلاً من التركيبات

Ⓐ (د ∘ ر) (س) Ⓑ (ر ∘ د) (س) Ⓒ (د ∘ د) (س)

الحـــــــل

Ⓐ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = ٢(ر (س)) +٣

= ٢(س٢ +١) +٣ = ٢س٢ + ٢ + ٣ = ٢س٢ + ٥

Ⓑ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) = (د (س))٢ +١

= (٢س + ٣)٢ + ١ = ٤س٢ +١٢س + ٩ + ١

= ٤س٢ +١٢س + ١٠

[نلاحظ من المثال أن : (د ∘ ر)(س) X (ر ∘ د)(س)]

Ⓒ (د ∘ د) (س) = د (د(س)) = د (٢س + ٣)

= ٢(٢س + ٣) +٣ = ٤س + ٦ + ٣ = ٤س + ٩

مثال ١٤ : إذا كان د(س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ ، ر(س) = س^{٢} − ٣

أوجد (د ∘ ر) (س) فى أبسط صورة موضحاً المجال ثم أوجد (د ∘ ر) (٢)

الحل

• (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = $\sqrt{\text{ر(س)} - ١}$

= $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٣ - ١}$ = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤}$

ر(س) = س^{٢} − ٣ ⟸ مجال ر(س) = م$_{١}$ = ح

• مجال (د ∘ ر) (س)

بوضع (س^{٢} − ٤) ≥ ٠ ⟸ (س − ٢)(س + ٢) ≥ ٠

∴ (م$_{٢}$) نوجد قيم س التى تجعل ر(س) فى مجال د = ح −] −٢ ، ٢[

مجال الدالة (د ∘ ر) (س) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح ∩ ح −] −٢ ، ٢[= ح −] −٢ ، ٢[

• (د ∘ ر) (٢) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤}$ = $\sqrt{٤ - ٤}$ = صفر

مثال ١٥ : إذا كانت د(س) = $\sqrt{\text{س} - ٣}$ ، ر(س) = $\sqrt{٥ - \text{س}}$

فأوجد مجال الدالة (د ∘ ر) (س)

الحل

(د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = د ($\sqrt{٥ - \text{س}}$) = $\sqrt{\sqrt{٥ - \text{س}} - ٣}$

ر(س) = $\sqrt{٥ - \text{س}}$ بوضع ٥ − س ≥ ٠ ⟸ المجال م$_{١}$ =] −∞ ، ٥]

بوضع $\sqrt{٥ - \text{س}}$ − ٣ ≥ ٠ ⟸ $\sqrt{٥ - \text{س}}$ ≥ ٣ نتربيع الطرفين

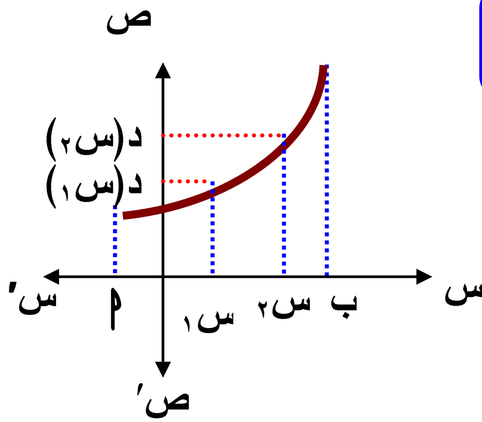
٥ − س ≥ ٩ ⟸ − س ≥ ٤

∴ (م$_{٢}$) نوجد قيم س التى تجعل ر(س) فى مجال د =] −∞ ، −٤]

مجال الدالة (د ∘ ر) (س) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ =] −∞ ، ٥] ∩] −∞ ، −٤] =] −∞ ، −٤]

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

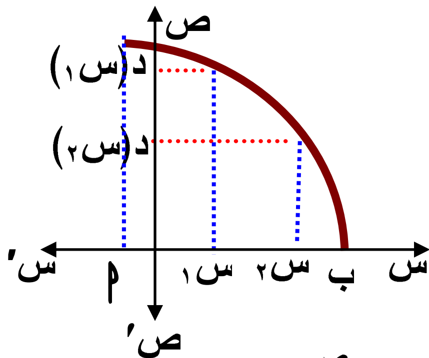
اطراد الدوال



(١) يقال للدالة د إنها تزايدية فى الفترة [ٲ ، ب]

إذا كان : س٢ > س١ ⇐ د (س٢) > د (س١)

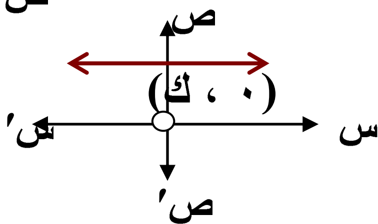
لكل س١ ، س٢ ∈ [ٲ ، ب]



(٢) يقال للدالة د إنها تناقصية فى الفترة [ٲ ، ب]

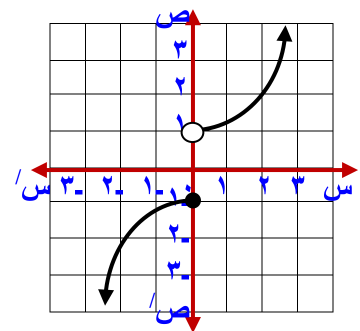
إذا كان : س٢ > س١ ⇐ د (س٢) < د (س١)

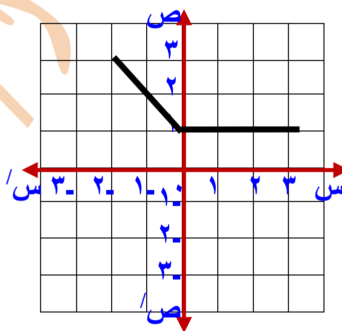
لكل س١ ، س٢ ∈ [ٲ ، ب]

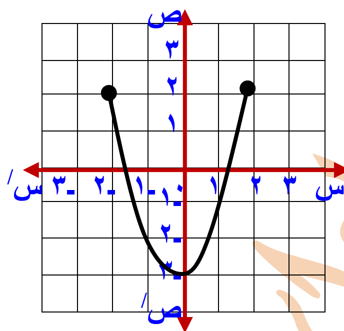


(٣) يقال للدالة د إنها ثابتة فى الفترة [ٲ ، ب]
إذا كان : د (س) = ك مقدار ثابت
لكل س ∈ [ٲ ، ب]

مثـــال ١٦ : من الرسم البيانى اذكر المجال والمدى وابحث اطرادها

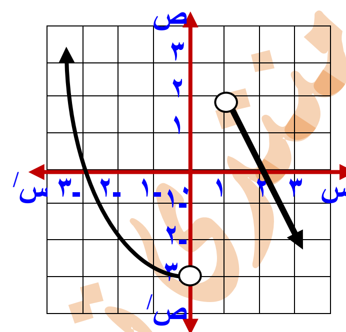


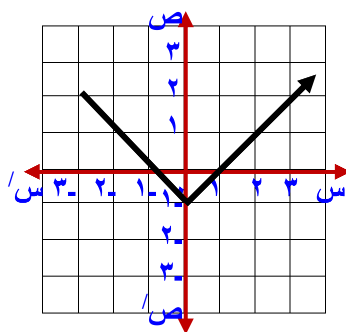


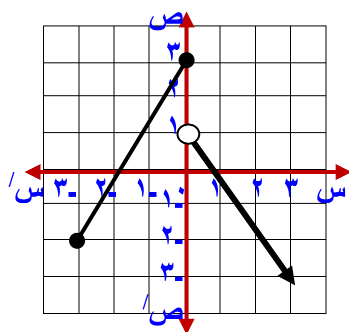


المجال = ع ،	المجال = ع – {٠} ،	المجال = [–٢ ، ٢]
المدى = ع – [-١ ، ١]	المدى = [١ ، ٣]	المدى = [–٣ ، ٢]
الدالة تزايدية فى] –∞ ، ٠ [	الدالة تناقصية فى] –٢ ، ٠ [	الدالة تناقصية فى] –٢ ، ٠ [
الدالة تزايدية فى] ٠ ، ∞ [	الدالة ثابتة فى] ٠ ، ٣ [	الدالة تزايدية فى] ٠ ، ٢ [

مثـــــال ١٧ـــــ :عين مجال ومدى كل من الدوال الممثلة







المجال = ع المدى = ع ـ [٠، ١ [الدالة تزايدية فى] ـ∞ ، ٠ [الدالة تناقصية فى] ١ ، ∞ [	المجال =] ـ٣ ، ∞ [المدى = [١ ، ∞ [الدالة تناقصية فى] ـ∞،٠ [الدالة ثابتة فى] ٠ ، ∞ [	المجال =] ـ٣ ، ∞ [المدى =] ـ∞ ، ٣] الدالة تزايدية فى] ـ٣ ، ٠ [الدالة تناقصية فى] ٠ ، ∞ [

الدالة الزوجية و الدالة الفردية

(١) إذا كان د(- س) = د(س) تكون الدالة زوجية

ويكون منحناها متماثلاً حول محور الصادات

مثل : د(س) = $س^{٢}$ ، د(س) = جتا س ، د(س) = ٢ ، د(س) = $س^{٤}$

(٢) إذا كان د(- س) = - د(س) تكون الدالة فردية

ويكون منحناها متماثلاً حول نقطة الأصل

مثل : د(س) = س ، د(س) = جا س ، د(س) = ظا س ، د(س) = جا س

(٣) معظم الدوال لازوجية ولافردية إذا كانت : د(ـ س) X د(س) أ، د(ـ س)X ـ د(س)

(٤) عند بحث نوع الدالة د يجب تحقق شرط انتماء العنصرين س ، ـ س إلى المجال

(٥) د(س) = ٢ $س^{ن}$ تكون زوجية إذا كان ن عدد زوجي ، فردية إذا كان ن عدد فردى

(٦) جا (- س) = - جا س ، جتا(- س)= جتا س ، ظا(- س) = - ظا س

(٥) إذا كان : الدالة فردية (ف) أو الدالة زوجية (ز) فإن (ز ± ز) دالة زوجية

، (ف ± ف) دالة فردية ، (ز ± ف) دالة ليست زوجية ولا فردية

مثـــ١٨ـــال: ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

(أ) د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ (ب) د(س) = س^{٢} جا س + س

(جـ) د(س) = س جتا٥س ظا س + جا^{٢} س

الحـــــل

(أ) د(ـ س) = $\frac{\text{جا (ـ س)}}{\text{ـ س}}$ = $\frac{\text{ـ جا س}}{\text{ـ س}}$ = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ = د(س) ∴ الدالة زوجية

(ب) د(ـ س) = (ـ س)^{٢} جا(ـ س) + (ـ س)

= س^{٢} × (ـ جا س) ـ س = ـ س^{٢} جا س ـ س

= ـ (س^{٢} جا س + س) = ـ د(س) ∴ الدالة فردية

(جـ) د(- س) = (ـ س) جتا(ـ ٥س) ظا(ـ س) + [جا(ـ س)]^{٢}

= (ـ س) جتا ٥س (ـ ظا س) + [ـ جا س]^{٢}

= س جتا٥س ظا س + جا^{٢} س = د(س) ∴ الدالة زوجية

مثـــ١٩ـــال: ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

(أ) د(س) = $\frac{\text{س}^{٣}\text{ جا ٣س}}{\text{١ + س}}$ (ب) د(س) = $\frac{٥}{٥^{\text{س}}}$ + ٥ × (٥)$^{\text{س}}$

(جـ) د(س) = $\left(\frac{\text{١ + س}}{\text{١ ـ س}}\right)^{٧}$ + $\left(\frac{\text{١ ـ س}}{\text{١ + س}}\right)^{٧}$

الحـــــل

(أ) د(- س) = $\frac{\text{(ـ س)}^{٣}\text{ جا (ـ ٣س)}}{\text{١ + (ـ س)}}$ = $\frac{\text{ـ س}^{٣}\text{ × (ـ جا ٣س)}}{\text{١ ـ س}}$

= $\frac{\text{ـ س}^{٣}\text{ × جا ٣س}}{\text{١ ـ س}}$ X د(س) ، د (ـ س) X ـ د(س)

∴ الدالة ليست زوجية ولا فردية

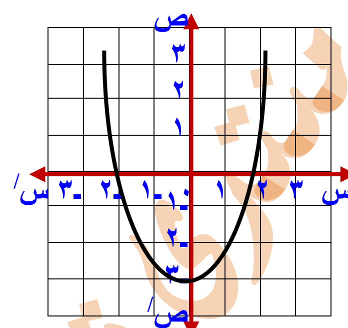
(ب) د(- س)= $\frac{٥}{(٥)^{\text{ـ س}}}$ + ٥ × (٥)$^{\text{ـ س}}$ = ٥ × (٥)$^{\text{س}}$ + $\frac{٥}{٥^{\text{س}}}$ = د(س)

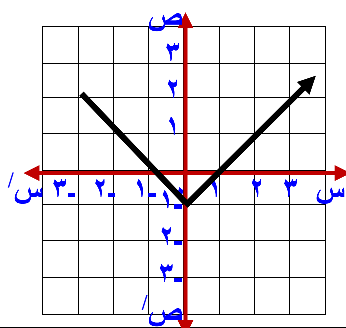
∵ د (س) = د (ـ س) ∴ الدالة زوجية

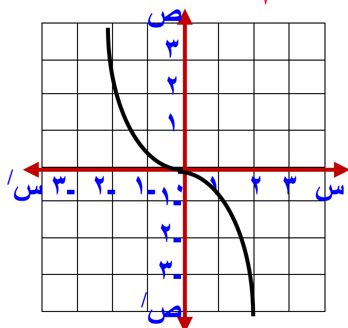
(جـ) د(- س) = $\left(\frac{\text{١ ـ(ـ س)}}{\text{١+(ـ س)}}\right)^{٧}$ + $\left(\frac{\text{١+ (ـ س)}}{\text{١ ـ(ـ س)}}\right)^{٧}$

= $\left(\frac{\text{١ + س}}{\text{١ ـ س}}\right)^{٧}$ + $\left(\frac{\text{١ ـ س}}{\text{١ + س}}\right)^{٧}$ = د(س) ∴ الدالة زوجية

مثـــ٢٠ــال :حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غيرذلك





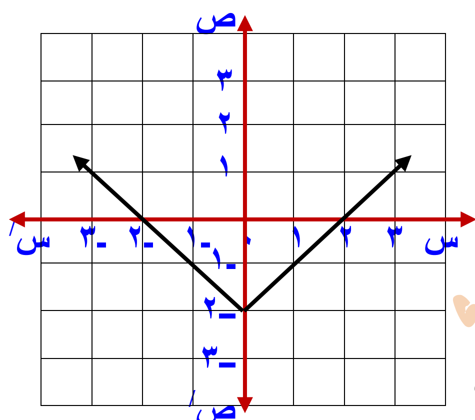


المجال = ح المنحنى متماثل حول محور الصادات ∴ الدالة زوجية	المجال =] -٣ ، ∞ [المنحنى ليس متماثل حول محور الصادات ولا حول نقطة الأصل ∴ الدالة ليست زوجية ولا فردية	المجال = ح المنحنى متماثل حول نقطة الأصل ∴ الدالة فردية

مثـــ٢١ــال :ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { س ـ ٢ ، س ≥ ٠ ؛ -س ـ ٢ ، س < ٠ }

الحـــــــل

س ـ ٢ : س ≥ ٠				-س ـ ٢ : س < ٠			
س	٢	١	٠	س	⓪	-١	-٢
د(س)	٠	-١	-٢	د(س)	⓶-	-١	٠



المجال ح ، المدى = [-٢ ، ∞ [

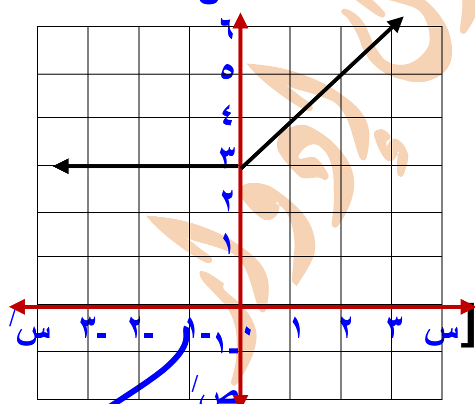
الدالة متناقصة فى]-∞ ، ٠[، متزايدة فى]٠ ، ∞ [

وهى دالة زوجية لأن منحناها متماثل حول محور الصادات

مثـــ٢٢ــال :ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { س + ٣ ، س > ٠ ؛ ٣ ، س ≤ ٠ }

الحـــــــل

س+٣ : س > ٠				٣ : س ≤ ٠			
س	٢	١	⓪	س	٠	-١	-٢
د(س)	٥	٤	⓷	د(س)	٣	٣	٣



المجال ح ، المدى = [٣ ، ∞ [

الأطراد: الدالة ثابتة فى]-∞ ، ٠[، متزايدة فى]٠ ، ∞ [

، الدالة ليست زوجية ولافردية

الدوال الأحادية :

تعريف : الدالة د : س ⟵ ص تسمى دالة أحادية إذا كان:

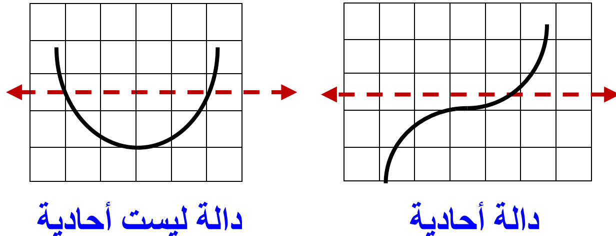
لكل ﻫ ، ب ∈ س ، د(ﻫ) = د(ب) فإن : ﻫ = ب

أ، لكل ﻫ ، ب ∈ س ، ﻫ ≠ ب فإن : د(ﻫ) ≠ د(ب)

يعنى أنه لا يوجد عنصران فى مجال الدالة الأحادية لهما نفس الصورة

اختبار الخط الأفقى

إذا وجد خط أفقى يقطع منحنى الدالة فى أكثر من نقطة فإن المنحنى لا يمثل دالة أحادية



ملاحظة: الدوال الزوجية بصفة عامة ليست دوال أحادية حيث د(ﻫ) = د(-ﻫ)

مثـــ٢٣ــال:فى كل من الدوال حدد ما إذا كانت الدالة أحادية أم لا مع توضيح السبب

(أ) د(س) = ٣س + ١ (ب) د(س) = س^{٢} + ٥ (جـ) د(س) = $\frac{\text{٢س} - ٣}{\text{٣س} + ٢}$

الحـــــل

(أ) بفرض : ﻫ ، ب ∈ مجال الدالة

∵ د(ﻫ) = ٣ﻫ +١ ، د(ب) = ٣ب +١ وبوضع د(ﻫ) = د(ب)

∴ ٣ ﻫ +١ = ٣ب +١ ⟸ ٣ ﻫ = ٣ب ∴ ﻫ = ب الدالة أحادية

(ب) بفرض : ﻫ ، ب ∈ مجال الدالة

∵ د(ﻫ) = ﻫ^{٢} +٥ ، د(ب) = ب^{٢} + ٥ وبوضع د(ﻫ) = د(ب)

∴ ﻫ^{٢} +٥ = ب^{٢} + ٥ ⟸ ﻫ^{٢} = ب^{٢} ∴ ﻫ = ± ب الدالة ليست أحادية

(جـ) بفرض : ﻫ ، ب ∈ مجال الدالة

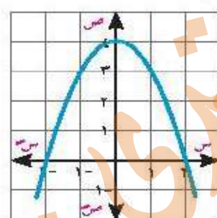
∵ د(ﻫ) = $\frac{\text{٢ﻫ} - ٣}{\text{٣ﻫ} + ٢}$ ، د(ب) = $\frac{\text{٢ب} - ٣}{\text{٣ب} + ٢}$ وبوضع د(ﻫ) = د(ب)

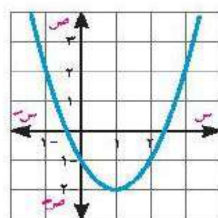
∴ $\frac{\text{٢ﻫ} - ٣}{\text{٣ﻫ} + ٢}$ = $\frac{\text{٢ب} - ٣}{\text{٣ب} + ٢}$ ⟸ ~~٦ﻫب~~ + ٣ ﻫ - ٩ب - ~~٦~~ = ~~٦ﻫب~~ - ٩ﻫ + ٤ب - ~~٦~~

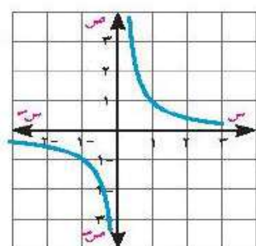
⟸ ١٣ﻫ = ١٣ ب ∴ ﻫ = ب ∴ الدالة أحادية

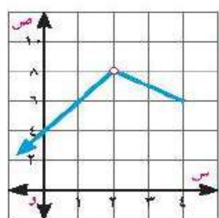
تمـــــــــارين

١ استنتج من الشكل البيانى مجال الدالة ومداها فى كل ممايأتى:

أ 

ب 

ج 

د 

٢ إذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ع

د(س) = { ٤ - س عندما -٢ ⩽ س < ١ ، س عندما ١ ⩽ س ⩽ ٦ }

ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

٣ باستخدام أحد البرامج الرسومية ؛ ارسم منحنى الدالة د فى كل من مايأتى ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.

أ د(س) = س^{٢} - ٥ ب د (س) = ٤ - س^{٢} ج د(س) = (س -١)^{٢} + ١

٤ في كل من الدوال المعرفة كما يلي حدد ما إذا كانت الدالة المعطاة أحادية أم لا ، مع توضيح السبب.

أ د(س) = ٣ س + ١ ب د (س) = $\frac{٢س + ١}{س - ٢}$ ج د(س) = س^{٢} + ١

٥ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث د(س) = (٣ - س)^{٢} ، ر(س) = (٣ + س)^{٢}

بين أى الدوال الآتية فردية وأيها زوجية وأيها غير ذلك

أ د + ر ب $\frac{د}{ر}$ ج د . ر

٦ باستخدام أحد البرامج الرسومية ؛ ارسم منحنى الدالة د فى كل من مايأتى ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.

أ د (س) س^{٣} ب د(س) = س^{٣} - ٣س ج د(س) $\frac{-١}{س - ٢}$

٧ ابحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

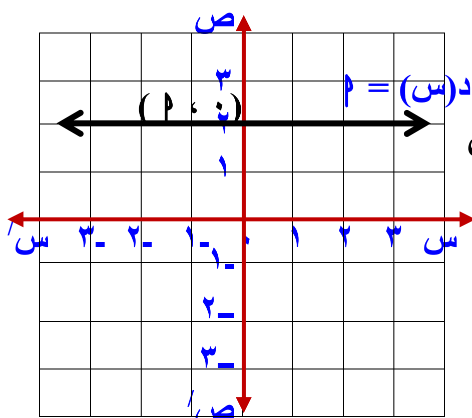
أ د(س) = س^{٤} + س^{٢} - ١ ب د (س) = ٣ س - ٤ س^{٣} ج د (س) = ٥

د د(س) = س^{٢} - ٣س هـ د (س) = $\frac{س^{٣} + ٢}{س - ٣}$ و د(س) = س حتا س

منتدى توجيه الرياضيات إعداد م/ عادل إدوار

التمثيل البيانى للدوال والتحويلات الهندسية

أولاً : دوال كثيرات الحدود



[١] الدالة الثابتة: الصورة العامة هى: د (س) = ٩ : ٩ ثابت

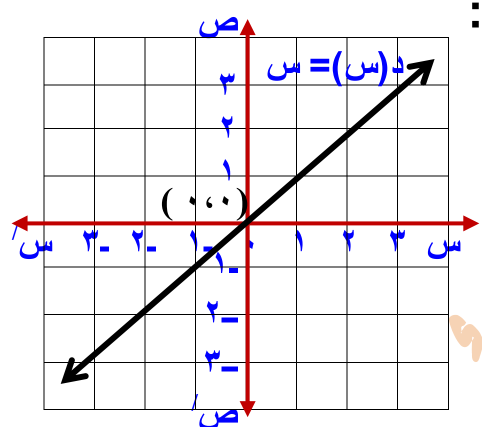
وتمثل بيانياً بمستقيم يوازى محور السينات

ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٩)

كما فى الشكل

* مجاله = ع ، مداها = { ٩ }

الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)



[٢] الدالة الخطية: أبسط صورة لدالة الدرجة الأولى هى:

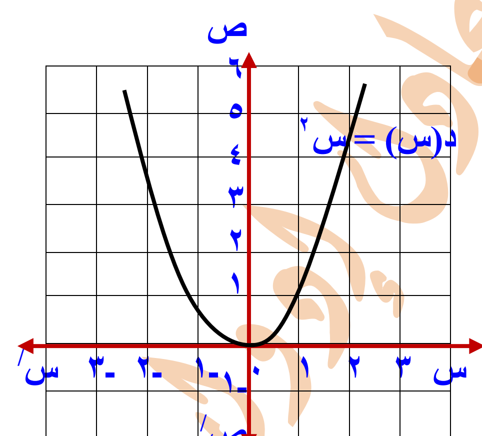
• د : ع ⟵ ع ، د (س) = س وتمثل بيانياً

بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠،٠) ميله = ١

* مجالها = ع ، مداها = ع

* الدالة تزايدية على مجالها ع

* الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل)



[٣] الدالة التربيعية : أبسط صورة للدالة التربيعيةهى:

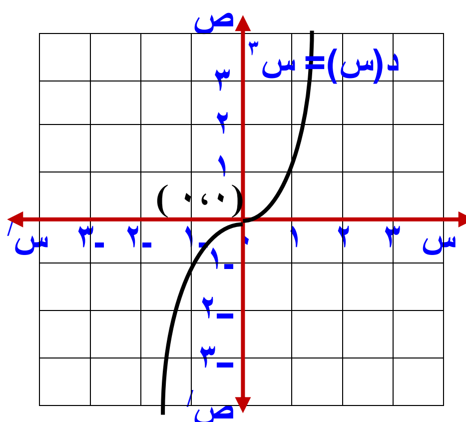
• د : ع ⟵ ع ، د (س) = $س^٢$

وتمثل بيانياً بمنحنى مفتوح لأعلى

* مجالها = ع ، مداها = [٠ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى]ـ∞ ، ٠] ، تزايدية فى [٠، ∞[

* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)



[٤] الدالة التكعيبية : أبسط صورة للدالة التربيعيةهى:

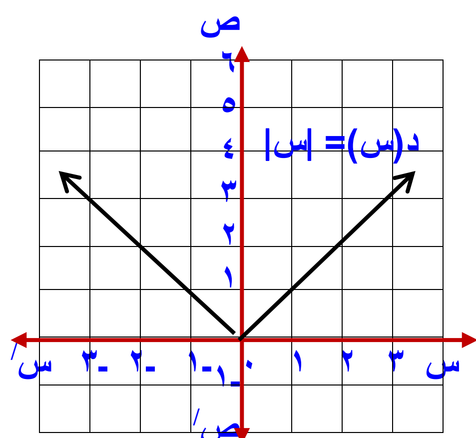
• د : ع ⟵ ع ، د (س) = س^٣ وتمثل بيانياً

بمنحنى متماثل حول نقطة الأصل (٠،٠) الدالة فردية

* مجال الدالة = ع ، مدى الدالة = ع

* ، تزايدية فى على مجالها ع

ثانياً : دالة المقياس



أبسط صورة لدالة المقياس هى:

• د : ع ⟵ ع ، د (س) = | س |

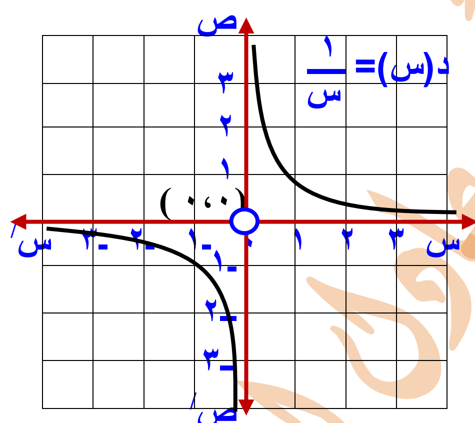
د (س) = { س : س ⩾ ٠ ، ـ س : س < ٠ }

* مجالها = ع ، مداها = [٠ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى] ـ∞ ، ٠] ، تزايدية فى [٠، ∞[

* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)

ثانياً : الدالة الكسرية



أبسط صورة لدالة المقياس هى:

• د : ع ـ {٠} ⟵ ع ، د (س) = $\frac{١}{س}$

تمثل بمنحنى من جزئين أحداهما فى الربع الأول

والآخر فى الربع الثالث دون أن يقطعا المحورين

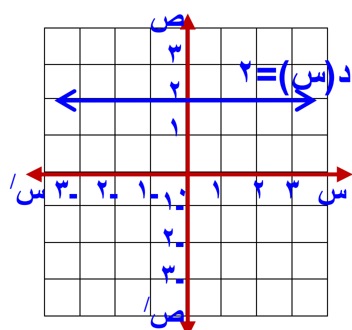
سس/ , صص/ ومتماثل حول نقطة الأصل (٠،٠)

* مجالها = ع ـ {٠} ، مداها = ع ـ {٠}

* الدالة تناقصية فى] ـ∞ ، ٠ [، تناقصية فى] ٠، ∞[

* الدالة فردية (متماثل حول نقطة الأصل)

مثـــ١ـــال: ارسم الدالة د(س) = ٢ ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

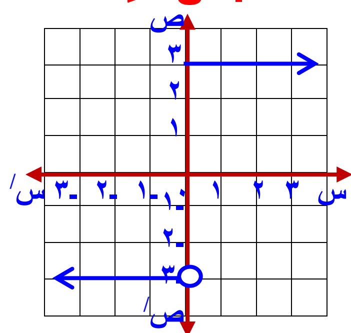


الحـــــــــل

المجال ع ، المدى = { ٢ }

الدالة ثابتة ، الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)

مثـــ٢ـــال:ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { -٣ : س < ٠ ، ٣ : س ⩾ ٠ }



الحـــــــــل

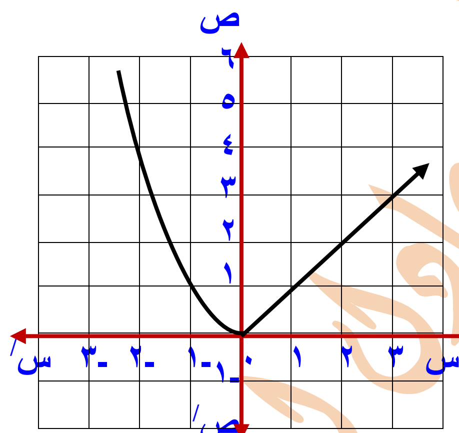
المجال ع ، المدى = {-٣ ، ٣ }

الدالة ثابتة فى] ـ ∞ ، ٠[، فى [٠ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولافردية

مثـــ٣ـــال:ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { س : س > ٠ ، $س^٢$: س ⩽ ٠ }

الحـــــــــل



الدالة معرفة بقاعدتين

$د_١$ (س) = س : س ∋] ٠ ، ∞ [يمثلها دالة خطية

بخط مستقيم يمر بالنقطة(٠،٠) وميله = ١

$د_٢$ (س) = $س^٢$:س ∋] ـ ∞ ، ٠] يمثلها دالة تربيعية

بخط منحنى مفتوح لأعلى

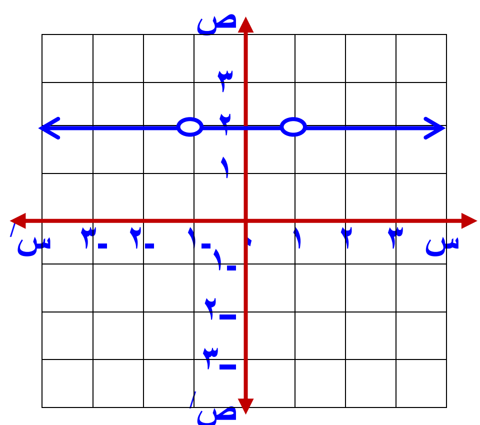
المجال ح ، المدى = [٠ ، ∞ [

الأطراد : الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠] ، الدالة تزايدية فى]٠ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولافردية

مثـــ٤ـــال: ارسم د(س) = $\frac{٢ س^٢ - ٢}{س^٢ - ١}$

حيث س ≠ ± ١ مع ذكر المجال والمدى واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :



الحـــــــــل

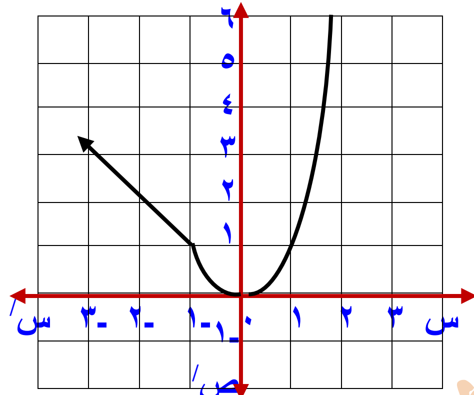
د(س) = $\frac{٢ (س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)}$ = $\frac{٢ (س - ١) (س + ١)}{(س - ١) (س +١)}$ = ٢

مجال د = ع - { -١ ، ١ }

مدىالدالة = { ٢ } ، الدالة زوجية

مثـــ٥ـــال:ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = $\begin{cases} س^٣ & : س > ١ \\ |س| & : س \leqslant ١ \end{cases}$

الحـــــــــل



الدالة معرفة بقاعدتين

$د_١$ (س) = $س^٣$: س ∈] ١ ، ∞ [يمثلها دالة تكعيبية

$د_٢$ (س) = |س| : س ∈] - ∞ ،١]

حسب تعريف دالة المقياس د(س) = - س

المجال ع ، المدى = [٠ ، ∞ [

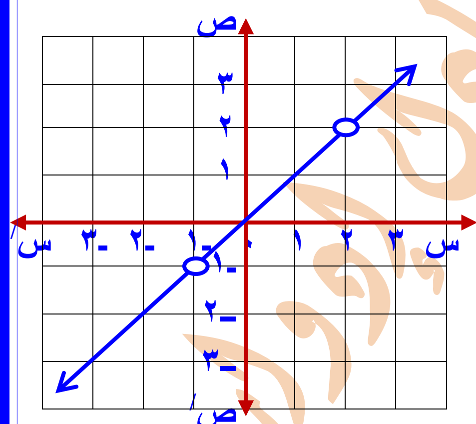
الأطراد : الدالة تناقصية فى] - ∞ ،-١] ، تناقصية فى]-١ ، ٠[، تزايدية فى]٠ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولافردية

مثـــ٦ـــال: ارسم د(س) = $\frac{س^٣ - س^٢ + ٢س}{س^٢ - س +٢}$

: س ≠ ٢ ، -١ مبيناً المجال والمدى وابحث اطرادها

الحـــــــــل



د(س) = $\frac{س (س - ٢) (س + ١)}{(س - ٢) (س +١)}$ = س

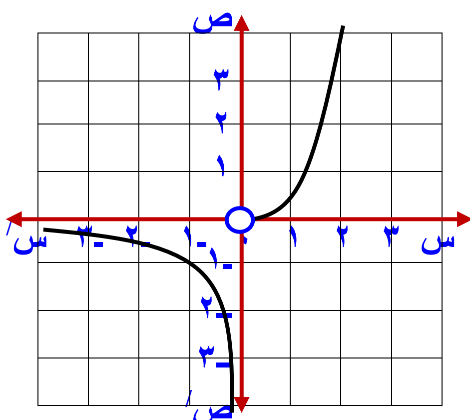
المجال = ع - { ٢ ، -١} ، المدى = ع - { ٢، -١}

د متزايدة على مجالها

الدالة ليست زوجية ولافردية

مثـــ٧ـــال: ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { $س^٢$: س > ٠ ، $\frac{١}{س}$: س < ٠ }

الحـــــــــــل



الدالة معرفة بقاعدتين

د١ (س) = $س^٢$: س ∋] ٠ ، ∞ [يمثلها دالة تربيعية

بخط منحنى مفتوح لأعلى

د٢ (س) = $\frac{١}{س}$: س ∋] – ∞ ، ٠[دالة كسرية

تمثل بمنحنى فى الربع الثالث دون أن يقطع المحورين

المجال ع – {٠} ، المدى = ع – {٠}

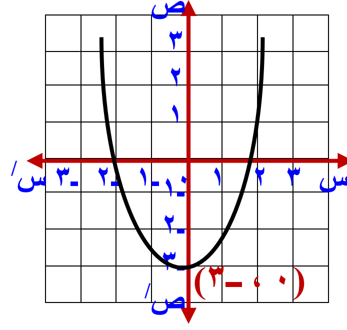
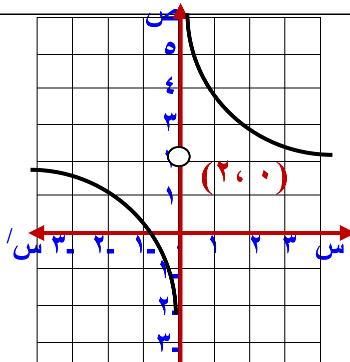
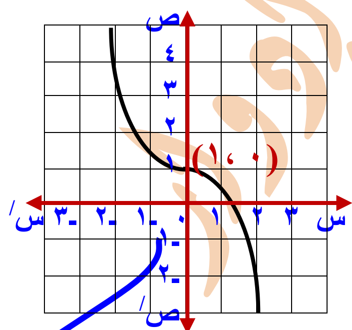
الأطراد : الدالة تناقصية فى] – ∞ ، ٠[، الدالة تزايدية فى] ٠ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولا فردية

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال

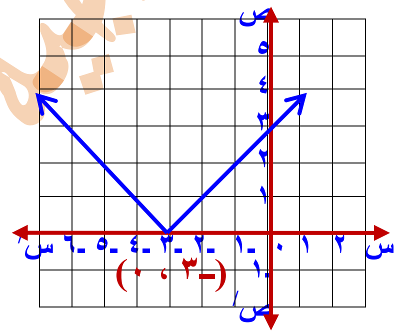
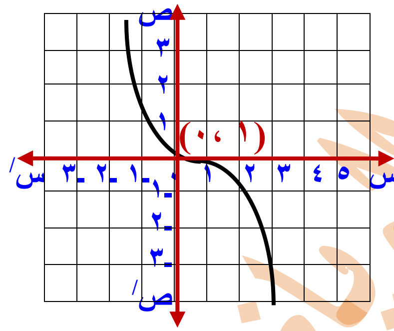
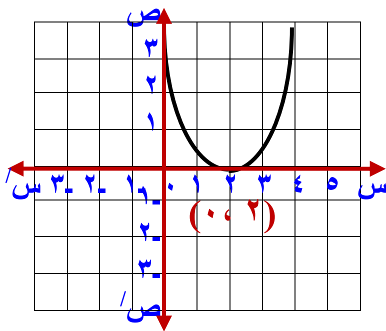
أولا : الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د(س) + أ ، أ ∋ ع – {٠} هو نفس المنحنى ص = د(س) بإزاحة رأسية قدرها |أ| فى اتجاه : { و ص ← : أ > ٠ ، و ص/ ← : أ < ٠ }

منحنى ص = $س^٢$ – ٣ هو نفسه منحنى ص = $س^٢$ بإزاحة رأسية قدرها ٣ فى اتجاه و ص/ ← (السالب)	منحنى ص = ١\س – ٣ هو نفسه منحنى ص = ١\س بإزاحة رأسية قدرها ٢ فى اتجاه و ص ← (الموجب)	منحنى ص = $س^٣$ + ١ هو نفسه منحنى ص = $س^٢$ بإزاحة رأسية قدرها ١ فى اتجاه و ص ← (الموجب)
		

ثانيا : الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة

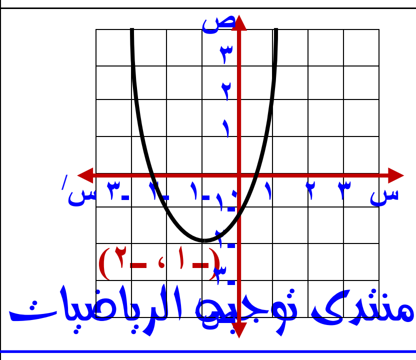
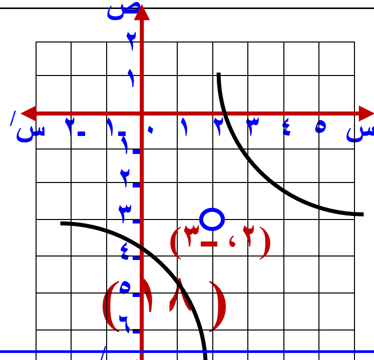
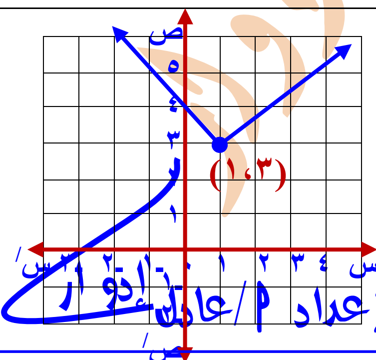
لأى دالة د يكون المنحنى ص = د(س + ب) ، ب ∈ ع − {٠} هو نفس المنحنى ص = د(س) بإزاحة أفقية قدرها |ب| فى اتجاه : و س ← : ب > ٠ ، و س′ ← : ب < ٠

منحنى ص = |س+٣| هو نفسه منحنى ص = |س| بإزاحة أفقية قدرها ٣ فى اتجاه و س′ (السالب)	منحنى ص = $(س-١)^٣$ هو نفسه منحنى ص = $س^٣$ بإزاحة أفقية قدرها ١ فى اتجاه و س (الموجب)	منحنى ص = $(س-٢)^٢$ هو نفسه منحنى ص = $س^٢$ بإزاحة أفقية قدرها ٢ فى اتجاه و س (الموجب)
		
نقطة تماثل (−٣، ٠) ، المدى [٠، ∞[الاطراد: تناقصية فى]−∞ ، ٠[تزايدية فى]٠ ، ∞[	نقطة تماثل (١ ، ٠) ، المدى = ع الدالة تناقصية على مجالها	نقطة تماثل (٢ ، ٠) ، المدى [٠، ∞[الاطراد: تناقصية فى]−∞ ، ٢[تزايدية فى]٢ ، ∞[

ثالثا : لأى دالة د يكون المنحنى ص = د(س + ٢) + ب ، ٢، ب ∈ ع − {٠} هو نفس

المنحنى ص = د(س) بإزاحة رأسية قدرها |٢| فى اتجاه و س ← عندما ٢ > ٠ ، و س′ ← عندما ٢ < ٠

ثم إزاحة رأسية مقدارها |ب| فى اتجاه و ص ← عندما ب > ٠ ، و ص′ ← عندما ب < ٠

منحنى ص = $(س+١)^٢$ − ٢ هو نفسه منحنى ص = $س^٢$ بإزاحة رأسية قدرها |٢| و ص′ بإزاحة أفقية قدرها |١| و س′	منحنى ص = $\frac{١}{س-٢}$ − ٣ هو نفسه منحنى ص = ١\س بإزاحة رأسية قدرها |٣| و ص′ بإزاحة أفقية قدرها |٢| و س	منحنى ص = |س − ١| + ٣ هو نفسه منحنى ص = |س| بإزاحة رأسية قدرها |٣| و ص بإزاحة أفقية قدرها |١| و س
		

منتدى توجيه الرياضيات

إعداد / ٢ عادل إدوار

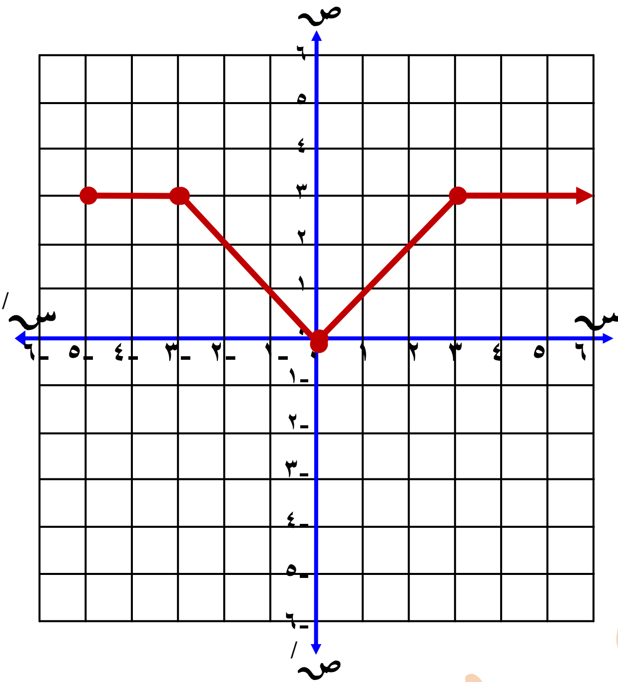
رابعا : لأى دالة د يكون المنحنى ص = ٩ د(س) حيث ٩ ∈ ع⁺

- تمدد رأسى للمنحنى إذا كان ٩>١ ، أنكماش رأسى للمنحنى إذا كان ٩ <١

مثـــ١ـــال: ارسم الشكل البياني للدالة : د(س) = { ٣ ، -٥ ⩽ س < -٣ ؛ |س| ، -٣ ⩽ س ⩽ ٣ ؛ ٣ ، س > ٣ }

مع ذكر المجال والمدى ، ابحث اطرادها وبين أنها دالة زوجية .

الحــــــــل



د١ : دالة ثابتة د(س) = ٣ فى [-٥ ، -٣]

د٢ : دالة مقياس د(س) = { س : ٠ ⩽ س ⩽ ٣ ؛ -س: -٣ ⩽ س < ٠ }

د٣ : دالة ثابتة د(س) = ٣ فى]٣ ، ∞ [

المجال = [-٥ ، ∞[، المدى = [٠ ، ٣]

ثابتة فى [-٥ ، -٣[، د متناقصة فى [-٣ ، ٠[

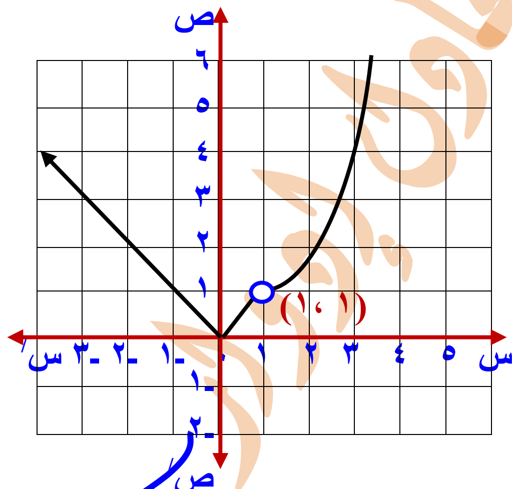
، تزايدية فى [٠ ، ٣] ، ثابتة فى] ٣ ، ∞[

ادالة ليست زوجية وليست فردية

مثـــ٢ـــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = { |س - ١| : س <١ ؛ س٢ - ١ : س >١ }

اذكر المجال والمدى وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية ، وابحث اطرادها :

الحــــــــل



د١: دالة مقياس د = { س - ١ : س ∈] - ∞ ، ٠] ؛ - س - ١ : س ∈]٠ ، ١[}

د٢: دالة تربيعية بإزاحة مقدارها |١| فى اتجاه و←س

المجال = ع - {١} ، المدى = [٠ ، ∞ [

الدالة متناقصة فى] - ∞ ، ٠[

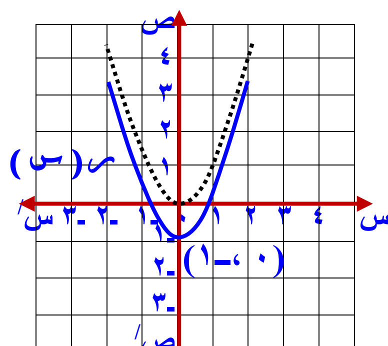
تتزايد فى] ٠ ، ١[، تتزايد فى] ١ ، ∞ [

مثــ٣ــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} لتمثيل الدوال ر ، ىـ ، هـ حيث

(أ) ر(س) = س^{٢} ـ ١ (ب) ىـ(س) = (س ـ ٣)^{٢} (جـ) هـ(س) = ٢ ـ س^{٢}

ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها

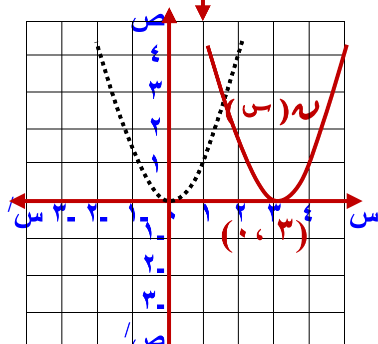
الحــــــــــــل



(أ) ر(س) = س^{٢} ـ ١ إزاحة قدرها |١| فى اتجاه وص′

رأس المنحنى (٠ ،ـ١) ، المدى = [ـ١ ، ∞ [

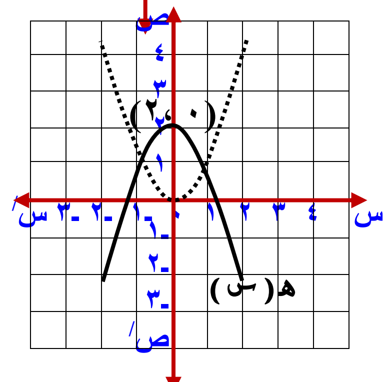
تناقصية] ـ∞ ،٠ [، تزايدية] ٠ ،∞ [



(ب) ىـ(س) = (س ـ ٣)^{٢} قدرها |٣| فى اتجاه وس

رأس المنحنى (٣ ، ٠) ، المدى = [٠ ، ∞ [

تناقصية] ـ∞ ،٣ [، تزايدية] ٣ ،∞ [



(جـ) هـ(س) = ٢ ـ س^{٢}

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

وإزاحة قدرها |٢| فى اتجاه وص

رأس المنحنى (٠ ، ٢) ، المدى =] ـ ∞ ، ٢]

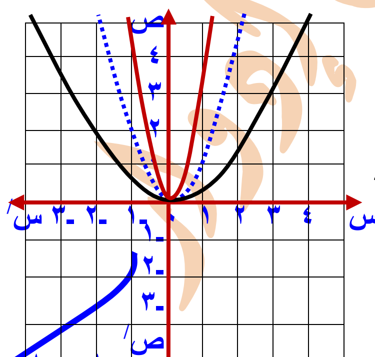
، الدالة تزايدية فى] ـ∞ ،٠ [، تناقصية فى] ٠ ،∞ [

مثــ٤ــال: ارسم فى شكل واحد منحنيات الدوال الآتية وعين مدى كل منها

واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١) د$_{١}$ (س) = س^{٢} ٢) د$_{٢}$ (س) = ٢س^{٢} ٣) د$_{٣}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

الحــــــــــــل



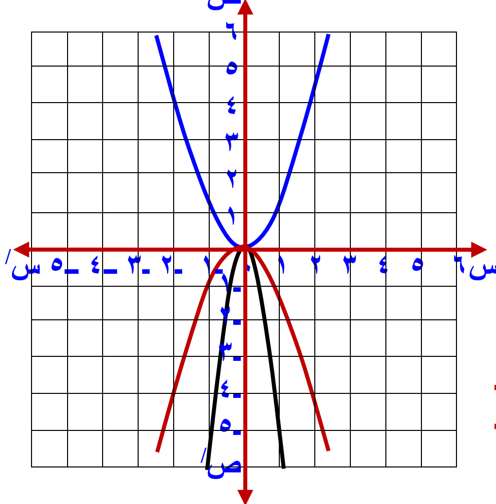
جميع الدوال نقطة رأس منحناها (٠ ، ٠)

، مجالها ع ، مداها = [٠ ، ∞ [، جميع الدوال زوجية

، جميعها متناقصة فى] ـ ∞ ، ٠ [، متزايدة فى] ٠ ، ∞ [

مثـــ٥ـــال: ارسم فى شكل واحد منحنيات الدوال الآتية وعين مدى كل منها واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١) د١ (س) = س٢ ٢) د٢ (س) = ـ س٢ ٣) د٣ (س) = ـ٢ س٢



الحــــــــــــل

جميع الدوال نقطة رأس منحناها (٠ ، ٠)

، مجالها ع ، جميع الدوال زوجية

، د١ مفتوح لأعلى مداها = [٠ ، ∞ [،

د٢ مفتوح لأسفل مداها]-∞ ، ٠]

الدالة متزايدة فى]-∞ ، ٠[، متناقصة فى]٠ ، ∞[

د٣ مفتوح لأسفل مداها]-∞ ، ٠]

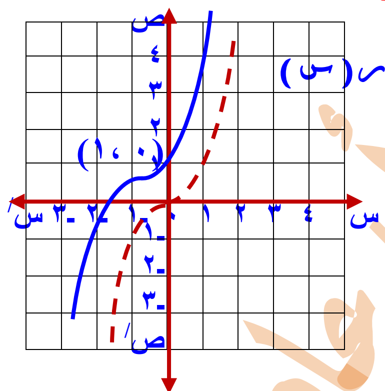
الدالة متزايدة فى]-∞ ، ٠[، متناقصة فى] ٠ ، ∞[

مثـــ٦ـــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س٢ لتمثيل الدوال ر ، ىه ، ه حيث

(أ) ر(س) = س٣ + ١ (ب) ىه(س) = (س ـ ٢)٣ (جـ) ه(س) = (س + ١)٣ +٢

ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها

الحــــــــــــل

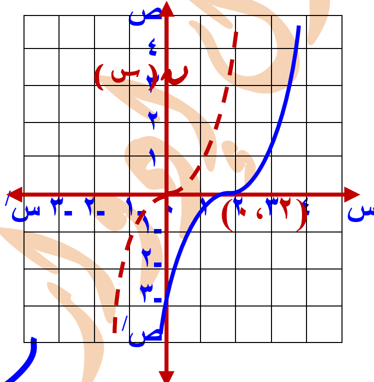


(أ) ر(س) = س٣+١

إزاحة قدرها |١| فى اتجاه وص

رأس المنحنى النقطة (٠ ، ١) ، المدى = ع

، الدالة تزايدية على مجالها

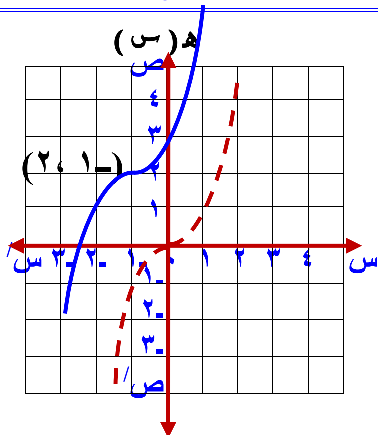


(ب) ىه(س) = (س ـ ٢)٣

إزاحة قدرها |٢| فى اتجاه وس

رأس المنحنى النقطة (٢ ، ٠) ، المدى = ع

، الدالة تزايدية على مجالها



ⓙ ر(س) = (س + ١)^{٣} + ٢

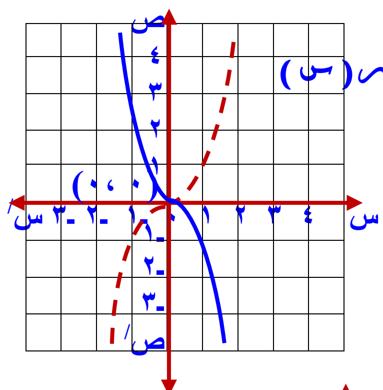
إزاحة |٢| فى اتجاه وسَ
وإزاحة |٢| فى اتجاه وصَ
رأس المنحنى النقطة (ـ١ ، ٢) ، المدى = ع
، الدالة تزايدية على مجالها

مثـــ٧ـــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} لتمثيل الدوال ر ، ر ، هـ حيث

Ⓐ ر(س) = ـ س^{٣} Ⓑ ر(س) = ٢س^{٣} ـ ٢ ⓙ هـ(س) = ـ١ ـ (س + ٢)^{٣}

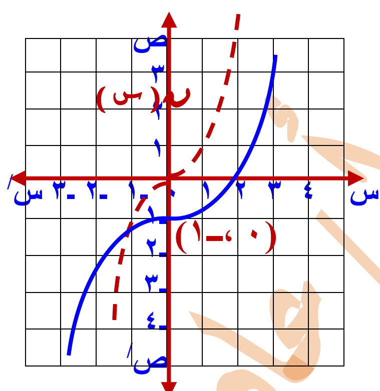
ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها

الحـــــــــــل



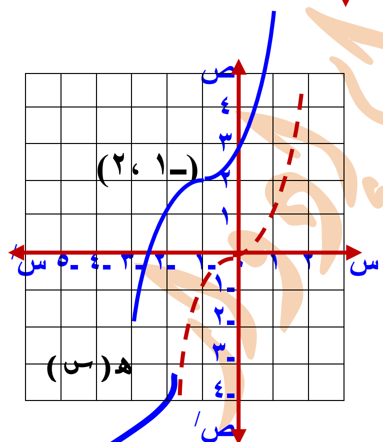
Ⓐ ر(س) = ـ س^{٣}

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب
رأس المنحنى النقطة (٠ ، ٠) ، المدى = ع
، الدالة تناقصية على مجالها



Ⓑ ر(س) = ٢س^{٣} ـ ١

إزاحة قدرها |١| فى اتجاه وصَ
يوجد تمدد فى الدالة
رأس المنحنى النقطة (٠ ، ـ ١) ، المدى = ع
، الدالة تزايدية على مجالها

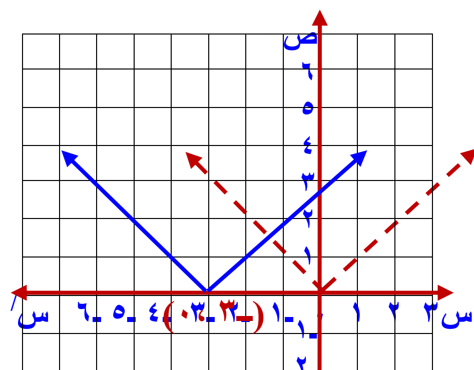


ⓙ ر(س) = ـ١ ـ (س + ٢)^{٣}

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب
إزاحة |٢| فى اتجاه وسَ
وإزاحة |١| فى اتجاه وصَ
رأس المنحنى النقطة (ـ٢ ، ١) ، المدى = ع
، الدالة تناقصية على مجالها

مثــ٨ــال: من رسم منحنى الدالة د(س) = | س | أرسم ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها Ⓐ ر(س) = | س + ٣| Ⓑ ى(س) = ٥ ـ | س|

الحـــــــل

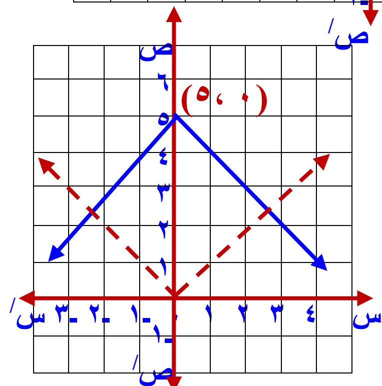


Ⓐ ر (س) = | س + ٣| دالة مقياس

بإزاحة أفقية قدرها |٣| فى اتجاه وس/ ←

نقطة التماثل (ـ٣ ، ٠) مجال ع ، مدى [٠،∞[

تناقصية فى]ـ∞،ـ٣[، تزايدية فى]ـ٣،∞[



Ⓑ ى (س) = ٥ ـ |س| دالة مقياس

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

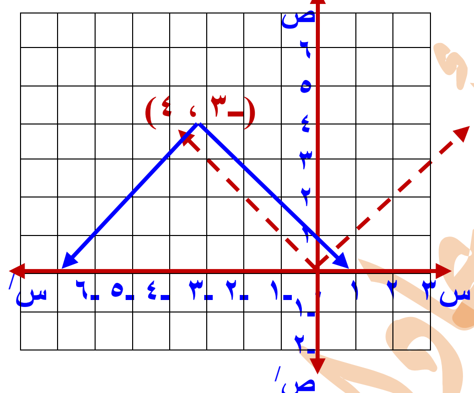
بإزاحة رأسية قدرها |٥| فى اتجاه وص/ ←

نقطة التماثل (٠ ، ٥) مجال ع، مدى]ـ ∞ ، ٥]

الدالة تزايدية فى]ـ∞،٠[، تناقصية فى]٠،∞[

مثــ٩ــال: من رسم منحنى الدالة د(س) = | س | أرسم ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها Ⓐ هـ(س) = ٤ ـ |س +٣| Ⓑ ر(س) = |$\frac{1}{2}$ س + ٤|+٢

الحـــــــل



Ⓐ هـ (س) = ٤ ـ |س +٣| دالة مقياس

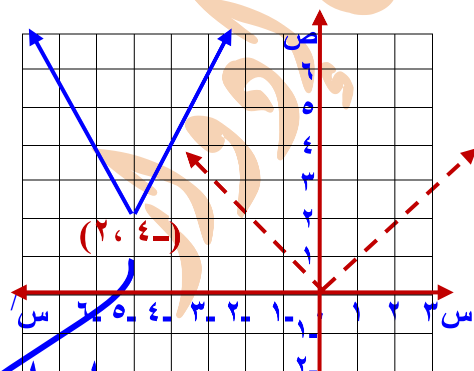
إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

بإزاحة رأسية قدرها |٤| فى اتجاه وص ←

بإزاحة أفقية قدرها |٣| فى اتجاه وس/ ←

نقطة التماثل (ـ٣، ٤) مجال ع ، مدى]ـ∞ ، ٤)

تزايدية فى]ـ∞،٠[،]٠،∞[



Ⓑ ر (س) = | س + ٣| دالة مقياس

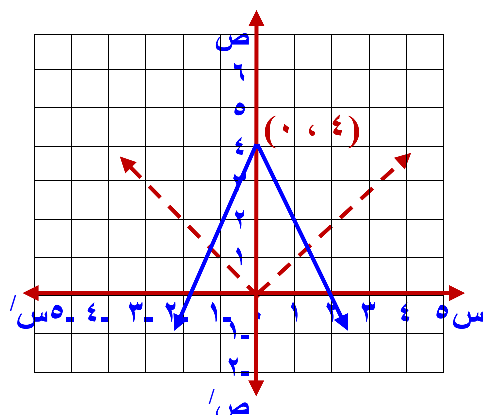
بإزاحة أفقية قدرها |٤| وس/ ← ، |٢| وص ←

نقطة التماثل (ـ٤ ، ٢) مجال ع ، مدى [٢،∞[

تناقصية فى]ـ∞،ـ٤[، تزايدية فى]ـ٤،∞[

مثـــ١٠ـــال: من رسم منحنى الدالة د(س) = | س | أرسم الدوال الآتيةثم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها ① ه(س) = ٤ ـ ٢ |س| ② ر(س) = $\sqrt{س^٢ + ٤س + ٤}$

الحـــــــل



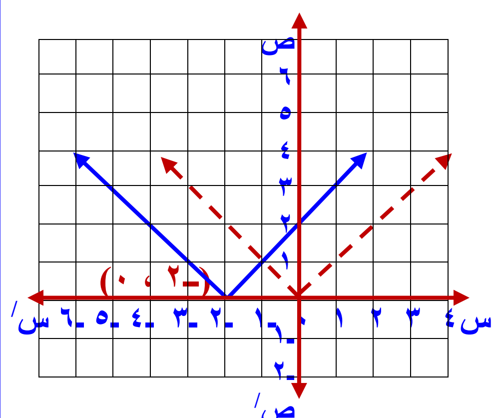
① ه (س) = ٤ ـ ٢ |س| دالة مقياس

تمدد فى منحنى الدالة و إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

بإزاحة رأسية قدرها |٤| فى اتجاه و ص

نقطة التماثل (٤ ، ٠) مجال ع ، المدى] ـ ∞ ، ٤]

الدالة تزايدية فى] ـ∞،٠[، تناقصية فى]٠،∞[



② ر (س) = $\sqrt{س^٢ + ٤س + ٤}$ = $\sqrt{(س + ٢)^٢}$

ر (س) = | س + ٢| دالة مقياس

بإزاحة أفقية قدرها |٢| فى اتجاه و س/

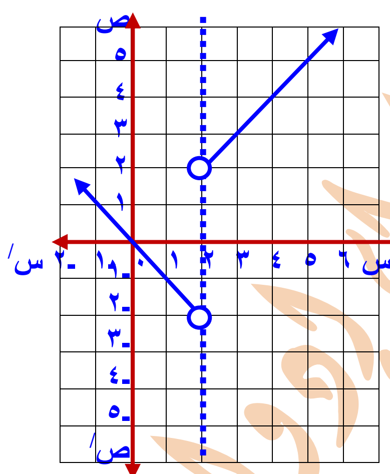
نقطة التماثل (ـ٢، ٠) مجال ع ، المدى [٠ ، ∞[

تزايدية فى] ـ∞،٠[،]٠،∞[

مثـــ١١ـــال: ارسم د(س) = $\frac{س^٢ - س - ٢}{| س - ٢ |}$ حيث س ≠ ٢

ومن الرسم عين المدى وابحث الاطراد

الحـــــــل



د(س) = { $\frac{(س - ٢)(س + ١)}{(س - ٢)}$ ، س >٢ ; $\frac{(س - ٢)(س + ١)}{-(س - ٢)}$ ، س <٢ }

∴ د(س) = { س+١ ، س > ٢ ; ـ س -١ ، س < ٢ }

المجال = ع ـ {٢} ، المدى =]-٣ ، ∞ [

الدالة متناقصة فى]- ∞ ، ٢ [، متزايدة فى] ٢ ، ∞ [

مثـــال ١٢ : من رسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ أرسم الدوال الآتيةثم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها ⓐ ر(س) = $\frac{١}{س - ١}$ ⓑ ن(س) = ($\frac{١}{س}$) ـ ٣

الحـــــــل

ⓐ ر (س) = $\frac{١}{س ـ ١}$ دالة كسرية

بإزاحة أفقية قدرها |١| فى اتجاه وس

نقطة التماثل النقطة (١ ، ٠)

مجال ع ـ {١} ، المدى ع ـ {٠}

تناقصية فى] ـ∞،١ [، تناقصية فى]١،∞[

ⓑ ن (س) = $\frac{١}{س}$ ـ ٣ دالة كسرية

بإزاحة رأسية قدرها |٣| فى اتجاه وص′

بإزاحة أفقية قدرها |٢| وس نقطة التماثل (٢،ـ٣)

مجال ع ـ {٢} ، المدى ع ـ {ـ٣}

تناقصية فى] ـ∞،٢ [، تناقصية فى]٢،∞[

مثـــال ١٣ : من رسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ أرسم الدوال الآتيةثم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها ⓐ هـ(س) = $\frac{-١}{س}$ +٢ ⓑ ن(س) = $\frac{١}{س ـ ٢}$ +٢

ⓐ هـ (س) = $\frac{-١}{س}$ ـ ٢ دالة كسرية

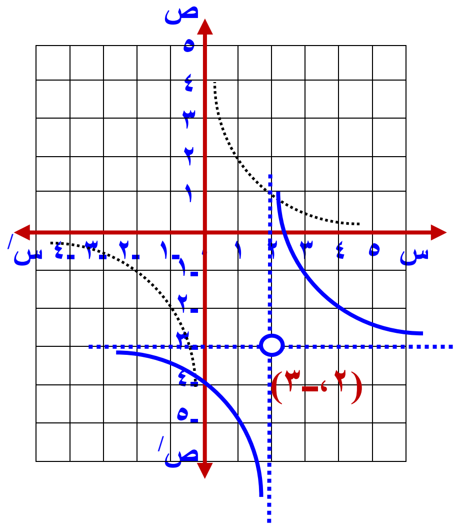
إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

بإزاحة رأسية قدرها |٢| فى اتجاه وص′

نقطة التماثل (٠ ،٢)

مجال ع ـ {٠} ، المدى ع ـ {٢}

تزايدية فى] ـ∞،٠ [، تزايدية فى]٠،∞[



ه) ر (س) = (١ / س - ٢) - ٣ دالة كسرية

بإزاحة رأسية قدرها |٣| فى اتجاه وص/

بإزاحة أفقية قدرها |٢| فى اتجاه وس

نقطة التماثل (٢ ، -٣)

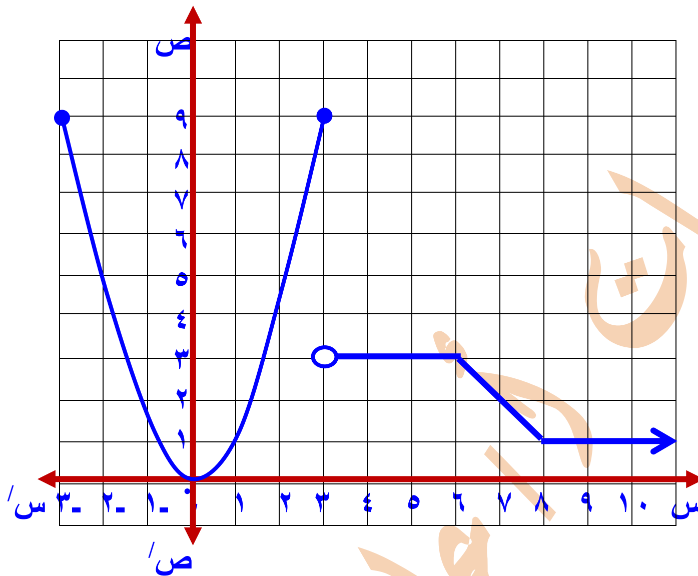
مجال ع - {٢} ، المدى ع - {-٣}

تناقصية فى]-∞،٢[، تناقصية فى]٢،∞[

مثـــ١٤ـــال: ارسم منحنى الدالة د(س) =
- س² عندما س ∈ [-٣ ، ٣ [
- ٣ عندما س ∈ [٣ ، ٦]
- ٩- س عندما س ∈] ٦ ، ٨]
- صفر عندما س >٨

ثم عين مدى الدالة واستنتج اطرادها

الحـــــــــل



من الرسم : مدى الدالة = [٠ ، ٩]

الدالة متناقصة فى [-٣ ، ٠] ،

الدالة متزايدة فى [٠ ، ٣]

الدالة ثابتة فى [٣ ، ٦]

الدالة متناقصة فى [٦ ، ٨]

الدالة ثابتة فى] ٨ ، ∞ [

مثـــ١٥ـــال: ابحث نوع د(س) = س³ | س | من حيث كونها زوجية أو فردية

الحـــــــــل

د(-س) = (-س)³ | -س | = -س³ | س | = - د(س) ∴ الدالة فردية

مثـــ١٦ـــال:ابحث نوع د(س) = | ٥+ س | + | ٥ - س | من حيث كونها زوجية أو فردية

الحـــــــــل

د(- س) = | ٥ - س | + | ٥+ س | = | ٥+ س | + | ٥ - س | = د(س) ∴الدالة زوجية

تمـــــــــارين

١ ارسم منحنى الدالة د ، ومن الرسم حدد مداها وابحث اطرادها

أ د(س) = { |س| عندما س ⩽ ٠ ، $س^٢$ عندما س > ٠ }

ب د(س) = { ٤ عندما س < -٢ ، $س^٢$ عندما س ⩾ -٢ }

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

منحنى ر(س) = $س^٢$ + ٤ هو نفس منحنى د(س) = $س^٢$ بازاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه:

أ $\overleftarrow{و س}$ ب $\overleftarrow{و س'}$ ج $\overleftarrow{و ص}$ د $\overleftarrow{و ص'}$

نقطة رأس منحنى الدالة د(س) = $(٢ - س)^٢$ + ٣ هي:

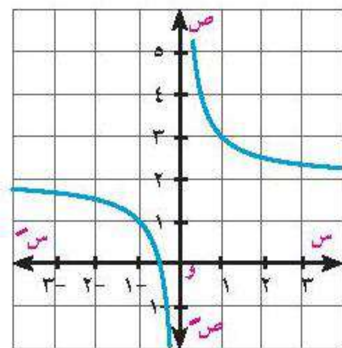
أ (٢، ٣) ب (٢، -٣) ج (-٢، ٣) د (-٢، -٣)

نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٤ هى:

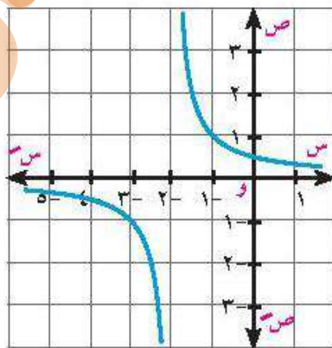
أ (٣، -٤) ب (-٣، -٤) ج (٣، ٤) د (-٣، ٤)

٣ رُسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$، ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات . اكتب قاعدة كل دالة التي تمثلها المنحنيات الآتية:

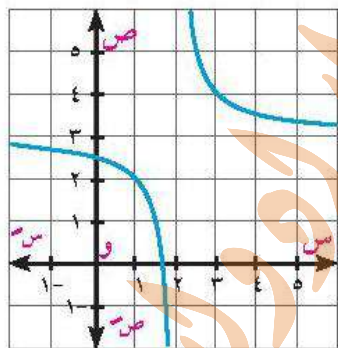
أ



ب



ج



٤	استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٢}$ لتمثيل ما يأتي بيانيًا. أ $د_{١}(س) = س^{٢} - ٤$ ب $د_{٢}(س) = (س - ٣)^{٢}$ جـ $د_{٣}(س) = (س - ١)^{٢} - ٢$
٥	استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٣}$. لتمثيل ما يأتي بيانيًا: أ $د_{١}(س) = د(س) - ٣$ ب $د_{٢}(س) = د(س - ٢)$ جـ $د_{٣}(س) = د(س + ٣) + ٢$ ⮜ ثم حدد نقطة التماثل لمنحنى كل دالة.
٦	إذا كانت الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ق وحدد نقطة التماثل لمنحنى الدالة: أ $ق(س) = د(س - ٣)$ ب $ق(س) = د(س) + ٢$ جـ $ق(س) = د(س - ٢) + ٢$
٧	استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = \|س\|$ لتمثيل مايأتى بيانيًا. أ $د_{١}(س) = ٢ - \|س\|$ ب $د_{٢}(س) = -\|س + ٥\|$ جـ $د_{٣}(س) = ٤ - \|س - ٢\|$ د $د_{٤}(س) = ٢\|س\|$ هـ $د_{٥}(س) = -٢\|س - ١\|$ و $د_{٦}(س) = ٥ - ٢\|س + ٢\|$
٨	ارسم منحنى الدالة د فى كل ممايأتى باستخدام التحويلات المناسبة ثم ابحث اطرادها أ $د_{١}(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -س^{٢} - ٢ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$ ب $د_{٢}(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{عندما } -٤ \leq س < ٠ \\ -س^{٢} - ١ & \text{عندما } ٠ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

[١] حل معادلات القيمة المطلقة.

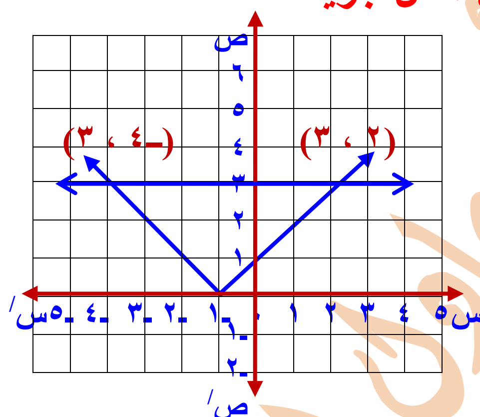
الطريقة البيانية: لحل المعادلة د(س) = ر(س) نرسم التمثيل البيانى (مجموعة الإحداثيات السينية) لنقط تقاطع منحنيا الدالتين د ، ر

خواص مقياس العدد :

- |س| ≥ ٠ ، |س| = ٠ إذا وفقط إذا كان س=٠
- |س ص| = |س| × |ص| ، |س + ص| ≤ |س| + |ص|
- |س| = |ـ س|
- فمثلاً |٣ـ٢ س| = |٢ س - ٣|
- إذا كان |س| = ٥ فإن س = ± ٥
- إذا كان |س - ٣| = |س + ١| فإن س-٣ = ± (س+١)
- |س|٢ = س٢ ، √س٢ = |س|

مثــ١ــال: حل المعادلة |س+ ١| = ٣ بيانياً وتحقق من الحل جرياً

الحـــــــــــــل



الحل بيانياً: نمثل الدالة د(س) = |س + ١|

والدالة ر(س) =٣ وتحديد نقط تقاطع الدالتين

(٢ ، ٣) ، (ـ٤، ٣) ∴ م.ح = {- ٤ ، ٢ }

الحل الجبرى : |س+ ١| = ٣ ⇐ (س +١)= ± ٣

⇐ س + ١ = ٣ أ، س + ١ = ـ٣

∴ س = ٣ ـ ١ =٢ أ، س = ـ٣ ـ ١ = ـ٤ ∴ م.ح = {- ٤ ، ٢ }

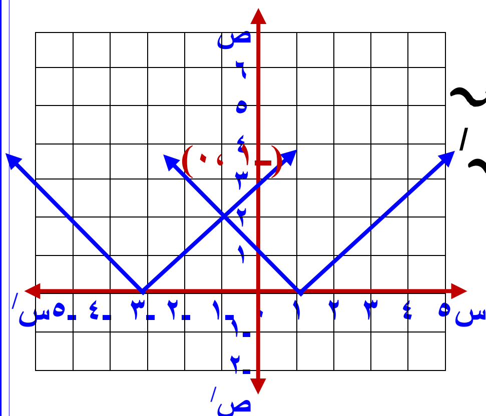
مثــ٢ــال: حل المعادلة |س + ٢| + ٥ = ٠

الحـــــــــــــل

|س+٢| = ـ ٥ وهذا مرفوض ∴ م.ح = ∅

مثـــ٣ـــال: حل المعادلة | س ـ ١ | = | س + ٣ | بيانياً وتحقق من الحل جبرياً

الحـــــل



الدالة د(س) = | س ـ ١ | إزاحة أفقية |١| فى اتجاه وس

والدالة ر(س) = | س + ٣ | إزاحة أفقية |٣| فى اتجاه وس'

من الرسم نقطة التقاطع للدالتين هى (ـ١ ، ٠)

∴ م.ح = { ـ ٤ ، ٢ }

الحل الجبرى : | س ـ ١ | = | س + ٣ | بتربيع الطرفين

⟸ س٢ ـ ٢ س + ١ = س٢ + ٦س + ٩

⟸ ـ٢س ـ ١ = ٦س + ٩ ⟸ ـ ٨ س = ٨

∴ س = ـ١ ∴ م.ح = { ـ١ }

مثـــ٤ـــال: حل المعادلة ٣ ـ | س | = ٢ | س | بيانياً وتحقق من الحل جبرياً

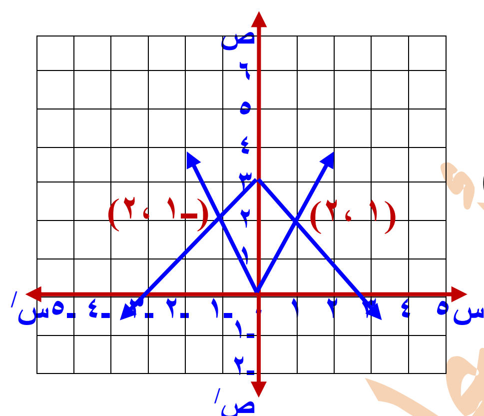
الحـــــل

الدالة د(س) = ٣ ـ | س | إنعكاس فى منحنى الدالة

، إزاحة رأسية |٣| فى اتجاه وص

والدالة ر(س) = ٢ | س | إنكماش فى تمثيل المنحنى

من الرسم نقطة التقاطع للدالتين هى (ـ١ ، ٢) ، (١ ، ٢)



∴ م.ح = { ـ ١ ، ١ }

الحل الجبرى : بإستخدام إعادة التعريف

المعادلة هى { ٣ ـ س = ٢س : س ≥ ٠ ، ٣ + س = ـ٢س : س < ٠ }

⟸ ٣ = ٣س أ، ٣ = ـ ٣س

⟸ س = ١ أ، س = ـ١ ∴ م.ح = { ـ١ ، ١ }

مثـــ٥ـــال: أوجد الحل الجبرى للمعادلة : ٣ $\sqrt{س^2}$ ـ ٢ | س | ـ ١ = ٠

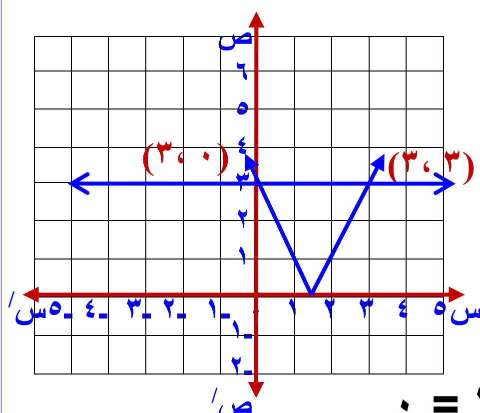
الحـــــل

٣ | س | ـ ٢ | س | ـ ١ = ٠ ∴ | س | = ١

∴ س = ± ١ ∴ م.ح = { ـ١ ، ١ }

مثـــ٦ـــال: حل المعادلة | ٢ س ـ ٣ | = ٣ بيانياً وحقق الناتج جبرياً

الحـــــــــــــل



الدالة د(س) = | ٢ س ـ ٣ | إنكماش فى منحنى الدالة

إزاحة أفقية | $\frac{٣}{٢}$ | فى اتجاه وس←،

والدالة ر(س) = ٣ دالة ثابتة توازى محور السينات

من الرسم نقطة التقاطع للدالتين هى (٣،٣) ، (٠،٣)

∴ م.ح = { ٣ ، ٠ }

الحل الجبرى: نضع المعادلة على الصورة : | ٢س ـ ٣ | ـ٣ = ٠

نفرض أن د(س) = | ٢ س ـ ٣ | ـ ٣

د (س) = { ٢س-٣-٣ : س ⩾ $\frac{٣}{٢}$ ، -٢س+٣-٣ : س < $\frac{٣}{٢}$ } = { ٢س ـ٦ : س ⩾ $\frac{٣}{٢}$ ، ـ ٢س : س < $\frac{٣}{٢}$ }

عندما س ⩾ $\frac{٣}{٢}$ فإن: ٢س ـ ٦=٠ ∴ س = ٣ تحقق

وعندما س < $\frac{٣}{٢}$ فإن : -٢س =٠ ∴ س =٠ تحقق

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٣}

حل جبرى آخر

∵ | ٢ س ـ ٣ | = ٣ ∴ (٢س-٣) = ± ٣

إما: ٢س-٣ = ٣ ومنها ٢س = ٦ ومنها س = ٣ وهى تحقق المعادلة

أو: ٢س-٣ = -٣ ومنها ٢س = ٠ ومنها س = ٠ وهى تحقق المعادلة

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٣}

حل جبرى ثالث

بتربيع الطرفين ∴ ٤س^{٢}-١٢س+٩ = ٩

∴ ٤س^{٢}-١٢س = ٠ ∴ ٤س(س -٣) = ٠

إما ٤س =٠ ومنها س = ٠ وهى تحقق المعادلة

أو س-٣ =٠ ومنها س = ٣ وهى تحقق المعادلة

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٣}

مثـــ٧ـــال: أوجد الحل الجبرى للمعادلة : $\sqrt{\text{س}^{٢}}$ ـ ٢ | س | ـ ١ = ٠

الحـــــــــــل

∵ $\sqrt{\text{س}^{٢}}$ = |س|

∴ | س |ـ ٥ | س | + ٦ = ٠ ∴ (| س | ـ ٢)(| س | ـ ٣) = ٠

إما | س | ـ ٢ = ٠ ومنها | س | = ٢ ومنها س = ± ٢

أ، | س | ـ ٣ = ٠ ومنها | س | = ٣ ومنها س = ± ٣

∴ مجموعة الحل = {ـ٢ ، ٢ ، ـ٣ ، ٣ }

مثـــ٨ـــال: أوجد الحل الجبرى للمعادلة : $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$ = ٤

الحـــــــــــل

$\sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$ = ٤ ⟸ $\sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢}}$ = ٤ وحيث $\sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢}}$ = | س ـ ٣ |

⟸ | س ـ ٣ | = ٤ ∴ (س ـ ٣) = ± ٤

إما س ـ ٣ = ٤ ومنها س = ٧ تحقق المعادلة

أ، س ـ ٣ = ـ ٤ ومنها س = ـ ١ تحقق المعادلة

∴ مجموعة الحل = { ١ ، ٧ }

∴ مجموعة الحل = {ـ٢ ، ٢ ، ـ٣ ، ٣ }

مثـــ٩ـــال: أوجد الحل الجبرى للمعادلة : |س + ١|^{٢} ـ ٣ |س + ١| ـ ١٠ = ٠

الحـــــــــــل

بالتحليل: (| س + ١| + ٢) (| س + ١| ـ ٥) = ٠

ومنها | س + ١| + ٢ = ٠ أ، | س + ١| ـ ٥ = ٠

⟸ | س + ١| = ـ ٢ مرفوض أ، | س + ١| = ٥

∴ س + ١ = ٥ عندما س ⩾ ـ١ س = ٤ تحقق التعريف

أ، س + ١ = ـ ٥ عندما س < ـ١ س = ـ٦ تحقق التعريف

∴ مجموعة الحل = { ٤ ، ـ ٦ }

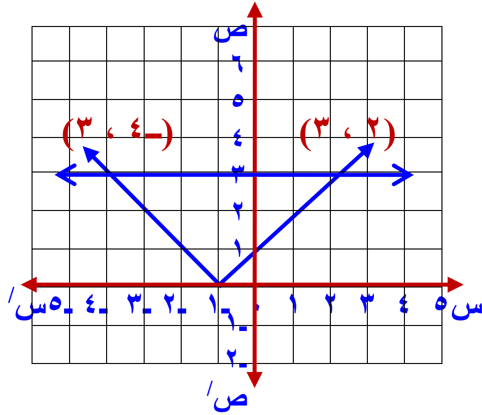
منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

[٢] حل متباينات القيمة المطلقة .

الحل البيانى لمتباينة القيمة المطلقة

مثـــال: حل ⓐ |س+ ١| = ٣ ، ⓑ |س+ ١| < ٣ ، ⓒ |س+ ١| > ٣ بيانياً

الحـــــــــل



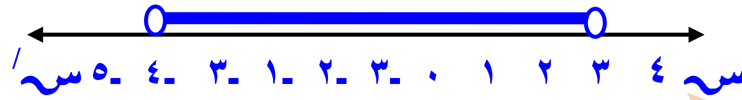
ⓐ نمثل الدالة د(س) = |س + ١|

والدالة ر(س) =٣ وتحديد نقط تقاطع الدالتين

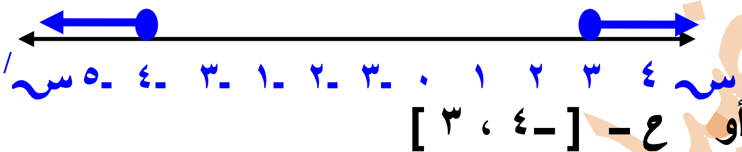
(٢ ، ٣) ، (-٤ ، ٣) ∴ م.ح = { - ٤ ، ٢ }

ⓑ حل المتباينة |س+ ١| < ٣

هو] -٤ ، ٣ [



ⓒ حل المتباينة |س+ ١| > ٣

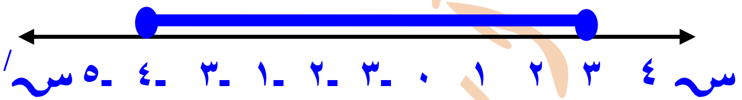


هو] -∞ ، -٤[∪] ٣ ، ∞[أو ح - [-٤ ، ٣]

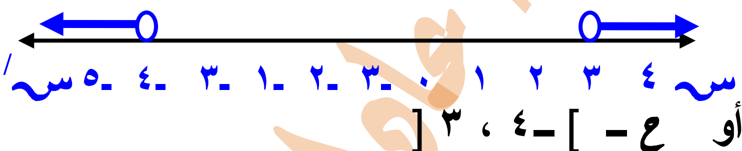
ملاحظة هامة :

ⓑ حل المتباينة |س+ ١| ≤ ٣

هو [-٤ ، ٣]



ⓒ حل المتباينة |س+ ١| ≥ ٣



هو] - ∞ ، -٤] ∪ [٣ ، ∞[أو ح -] -٤ ، ٣ [

الحل الجبرى لمتباينة القيمة المطلقة

❖ إذا كان | س | < ٩ فإن - ٩ < س < ٩ ⇐ س ∈] - ٩ ، ٩ [

❖ إذا كان | س | > ٩ فإن س > ٩ ، س < - ٩ ⇐ س ∈ ح - [- ٩ ، ٩]

❖ إذا كان | س | ≤ ٩ فإن - ٩ ≤ س ≤ ٩ ⇐ س ∈ [- ٩ ، ٩]

❖ إذا كان | س | ≥ ٩ فإن س ≥ ٩ ، س ≤ - ٩ ⇐ س ∈ ح -] - ٩ ، ٩ [

مثـــ٢ـــال: حل المتباينة | س ـ ٣ | < ٥

الحـــــــــل

القاعدة المستخدمة إذا كان | س | < م فإن ـ م < س < م ⟸ س ∈] ـ م ، م [

∵ |س ـ ٣ | < ٥ ∴ ـ ٥ < س ـ ٣ < ٥ بإضافة ٣ للمتباينة

∴ ـ ٢ < س < ٨

∴ س ∈] ـ٢ ، ٨ [



مثـــ٣ـــال : حل المتباينة | ٣ ـ ٢س | ⩽ ٧

الحـــــــــل

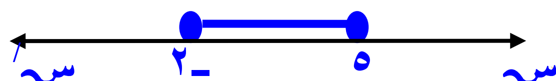
القاعدة المستخدمة إذا كان : |س| ⩽ م فإن – م ⩽ س ⩽ م ⟸ س ∈ [– م ، م]

∵ | ٢س - ٣ | ⩽ ٧ ∴ ـ ٧ ⩽ ٢س ـ ٣ ⩽ ٧ بإضافة ٣ للمتباينة

∴ ـ٧+٣ ⩽ ٢س ⩽ ٧ + ٣

∴ ـ٤ ⩽ ٢س ⩽ ١٠

∴ ـ ٢ ⩽ س ⩽ ٥ ∴ س ∈ [٢- ، ٥]



مثـــ٤ـــال: حل المتباينة | ٢ س + ١ | +٢ > ٧

الحـــــــــل

القاعدة المستخدمة

إذا كان | س | > م فإن س > م ، س < ـ م ⟸ س ∈ ح ـ] ـ م ، م [

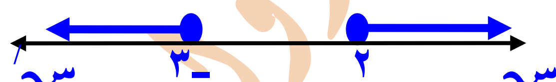
∵ | ٢ س + ١ | +٢ > ٧ ∴ | ٢ س + ١ | > ٥

∴ ٢ س + ١ > ٥ أ، ٢ س + ١ < ـ ٥ بطرح (١)

∴ ٢ س > ٤ أ، ٢ س < ـ ٦

∴ س > ٢ أ، س < ـ ٣

∴ حل المتباينة س ∈ ح ـ] ـ ٣ ، ٢ [



مثــ٥ــال: حل المتباينة | ٣ س + ٢ | +٥ > ٤

الحـــــــــــــــل

∵ | ٣ س + ٢ | +٥ > ٤ ∴ | ٣ س + ٢ | +٥ > ـ١ مرفوضة

∴ حل المتباينة هو ∅

مثــ٦ــال: حل المتباينة | ٣ س + ٢ | ⩾٧

الحـــــــــــــــل

القاعدة المستخدمة

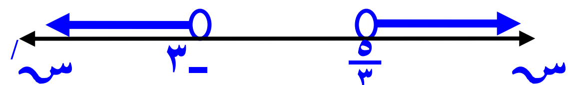
إذا كان | س | ⩾ ٯ فإن س ⩾ ٯ ، س ⩽ ـ ٯ ⟸ س ∈ ح ـ] ـ ٯ ، ٯ [

∵ | ٣ س + ٢ | ⩾ ٧

∴ ٣ س + ٢ ⩾ ٧ أ، ٣ س + ٢ ⩽ ـ ٧ بطرح (٢)

∴ ٣ س ⩾ ٥ أ، ٣ س ⩽ ـ ٩

∴ س ⩾ $\frac{٥}{٣}$ أ، س ⩽ ـ ٣



∴ حل المتباينة س ∈ ح ـ] ـ ٣ ، $\frac{٥}{٣}$ [

مثــ٧ــال: حل المتباينة | ٣ ـ س | ⩽ ٦

الحـــــــــــــــل

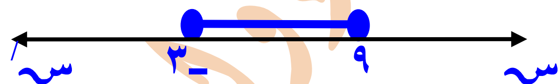
القاعدة المستخدمة إذا كان : | س | ⩽ ٯ فإن – ٯ ⩽ س ⩽ ٯ ⟸ س ∈ [– ٯ ، ٯ]

∵ | ٣ - س | ⩽ ٦ ∴ ـ ٦ ⩽ ٣ ـ س ⩽ ٦ بطرح ٣ المتباينة

∴ ـ ٦ ـ ٣ ⩽ ـ س ⩽ ٦ ـ ٣

∴ ـ ٩ ⩽ ـ س ⩽ ٣ بالضرب × (ـ١) نعكس المتباينة

∴ ٩ ⩾ س ⩾ ـ٣



∴ حل المتباينة س ∈ [ـ ٣ ، ٩]

ملاحظة: ممكن المتباينة | ٣ ـ س | ⩽ ٦ تكتب | س ـ ٣ | ⩽ ٦

مثــ٨ــال: حل المتباينة $\sqrt{٤س^٢ - ١٠س + ٢٥} > ١$

الحـــــــــل

∵ $\sqrt{س^٢ - ١٠س + ٢٥} = \sqrt{(س - ٥)^٢} = |س - ٥|$ ⟸ المتباينة $|س - ٥| > ١$

القاعدة المستخدمة

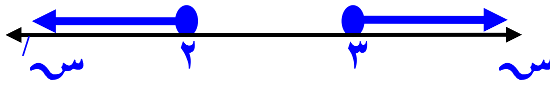
إذا كان $|س| > م$ فإن $س > م$ ، $س < -م$ ⟸ $س \in ح - [-م ، م]$

إما ٢س-٥>١ أ، ٢س-٥ < -١ بجمع (٥) للمتباينة

∴ ٢ س > ٦ أ، ٢س < ٤ بالقسمة على (٢)

∴ س >٣ أ، س <٢

∴ $س \in ح - [٢ ، ٣]$



مثــ٩ــال: حل المتباينة $|س - ٢| + |٤ - ٢س| \leq ٦$

الحـــــــــل

∵ $|٤ - ٢س| = ٢|٢ - س| = ٢|س - ٢|$

المتباينة $|٢ - س| + |٤ - ٢س| \leq ٦$ تكتب $٣|س - ٢| \leq ٦$

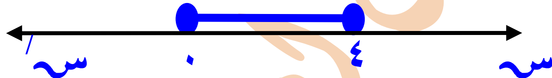
المتباينة تكون $|س - ٢| \leq ٢$

القاعدة المستخدمة إذا كان : $|س| \leq م$ فإن $-م \leq س \leq م$ ⟸ $س \in [-م ، م]$

∵ $|س - ٢| \leq ٢$ ∴ $-٢ \leq س - ٢ \leq ٢$ بجمع (٢) المتباينة

∴ صفر $\leq س \leq ٤$

∴ حل المتباينة $س \in [٠ ، ٤]$



تمـــارين

توجيه الرياضيات أ/ عادل ادوار

أكمل مايأتى:

١) مجموعة حل المعادلة |س| = $\frac{١}{٢}$ هى ....

٢) مجموعة حل المعادلة |س| + ٣ = ٠ هى ....

٣) مجموعة حل المتباينة |س − ٢| ⩽ ٠ هى ....

اختر من القائمة التالية مجموعة الحل المناسبة لكل معادلة أو متباينة ممايأتى:

٤) |س − ٢| = ٣

٥) |س − ٢| < ٣

٦) |س − ٢| > −٣

٧) |س − ٢| ⩽ ٣

٨) |س − ٢| > ٣

٩) |س − ٢| = −٣

أ)]−١ ، ٥[

ب) ح

جـ) {−١ ، ٥}

د) ح − [−١ ، ٥]

هـ) ϕ

و) [−١ ، ٥]

أوجد جبريا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

١٠) |س + ٣| = ٦

١١) |٢س − ٧| = ٥

١٢) |٣ − ٢س| = ٧

١٣) |س − ٣| = |س + ١|

١٤) |٢س + ١| = |س − ٣|

١٥) $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}$ = ٤

أوجد بيانيًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

١٦) |س + ٤| = ٣

١٧) |س − ١| = |س + ٣|

١٨) |٢س − ٥| = ٣

أوجد بيانيًا مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

١٩) |س − ١| < ٣

٢٠) |س − ٢| ⩽ ٥

٢١) |س + ٣| > ٢

أوجد جبريًا مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

٢٢) |٢س − ١| > ٣

٢٣) |٢س + ٣| ⩽ ٧

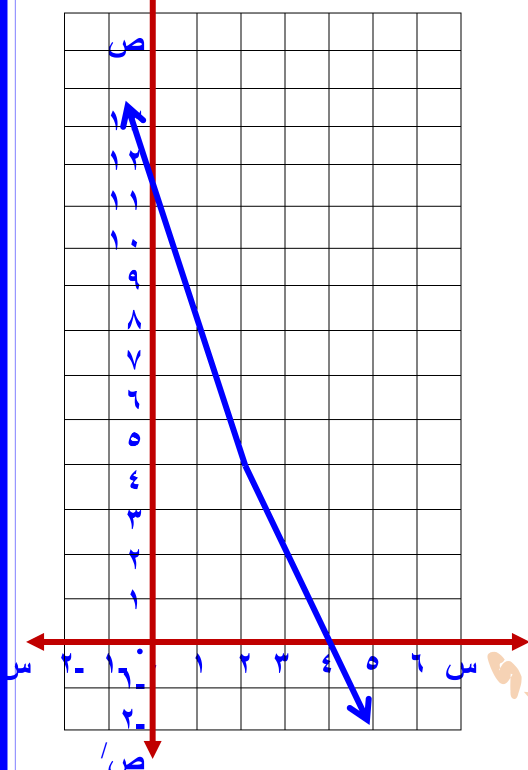
٢٤) |٣س − ٧| ⩾ ٢

أمثلة عامة

مثـــ١ـــال: ارسم الشكل البياني للدالة د(س) = | س ـ ٢ | -٣س+١٠ واستنتج من الرسم المدى وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك واستنتج مجموعة حل المعادلة | س ـ ٢ | = ٣س-١٠ وحقق ذلك جبرياً :

الحـــــــــــل

د(س) = { س-٢-٣س+١٠ : س ⩾ ٢ ، - س+٢-٣س+١٠ : س < ٢ } = { ـ ٢س + ٨ : س ⩾ ٢ ، ـ ٤س +١٢ : س < ٢ }



المجال ع ، المدى ع ، د متناقصة على مجالها ،

الدالة ليست زوجية ولا فردية

المعادلة | س ـ ٢ | = ٣س-١٠

هى | س ـ ٢ | -٣س+١٠ = ٠

هى د(س) = ٠ ∴ مجموعة الحل = { ٤ }

الاحداثى السينى لتقاطع الدالة مع محور السينات

الحل الجبرى

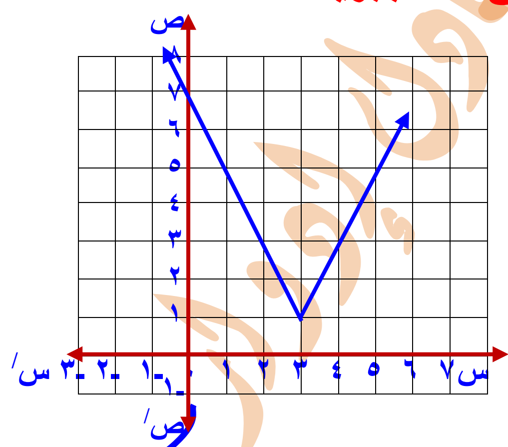
ـ ٢س + ٨ = ٠ : س ⩾ ٢ ⟸ س = ٤ تحقق

ـ ٤س +١٢ =٠ : س < ٢ ⟸ س = ٣ لا تحقق

∴ مجموعة الحل = {٤}

مثـــ٢ـــال: ارسم د(س) = ٢ | س ـ ٣ | +١ ومن الرسم استنتج المدى وابحث اطرادها واستنتج مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ وحقق ذلك جبرياً .

الحـــــــــــل



د(س) = { ٢(س ـ ٣) + ١ : س ⩾ ٣ ، ٢(ـ س ـ٣) +١ : س < ٣ }

= { ٢س ـ ٦+ ١ = ٢س ـ٥ : س ⩾ ٣ ، ـ ٢س +٦+١ = ـ٢س +٧ : س < ٣ }

المدى = [١ ، ∞ [∴ مجموعة الحل = ∅

الدالة متناقصة فى] ـ ∞ ، ٣] ، و متزايدة فى [٣ ، ∞ [

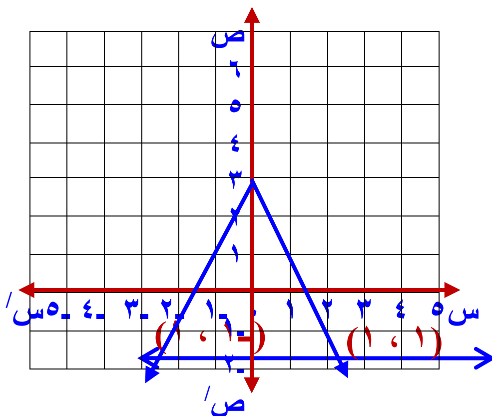
الحل الجبرى : د(س) = ٢س ـ ٥ = ٠ : س ⩾ ٣ ⇐ س = $\frac{٥}{٢}$ ⩾ ٣ لا تحقق

د(س) = ـ ٢س + ٧ = ٠ : س < ٣ ⇐ س = $\frac{٧}{٢}$ ⩽ ٣ لا تحقق

∴ مجموعة الحل = ∅

مثــ٣ــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = ٣ ـ | ٢ س | واستنتج المدى وابحث اطرادها وأثبت أنها زوجية ، ثم أوجد حل Ⓐ ٣ ـ | ٢ س | = ١ Ⓑ ٣ ـ | ٢ س | ⩾ ١

الحــــــل



د(س) = { ٣-٢س ، س ⩾ ٠ ؛ ٢س+٣ ، س < ٠ }

المدى =]-∞ ، ٣]

د متزايدة فى]-∞ ، ٠ [، متناقصة فى]٠ ، ∞ [

د زوجية لأن منحناها متماثل حول محور الصادات

Ⓐ نرسم د١ = -٣ | ٢ س | إزاحة رأسية مقدارها |٣| فى اتجاه و ص⃖

وانكماش لمنحنى الدالة ونرسم د٢(س) = ١

ومن الرسم نجد نقط التقاطع للدالتين مجموعة الحل = { -١ ، ١ }

Ⓑ | ٢س| ⩾ ٢ ⇐ ٢س ⩾ ٢ أ، ٢س ⩽ ـ٢



∴ س ⩾ ١ أ، س ⩽ ـ١ ∴ س ∈ ع ـ] ـ١ ، ١ [

مثــ٤ــال: عين مجال د(س) = $\sqrt{٥ ـ | س ـ ١ |}$

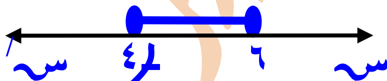
الحــــل

∵ ٥ـ |س ـ ١| ⩾ ٠ ∴ ـ |س ـ ١| ⩾ ـ ٥

∴ |س ـ ١| ⩽ ٥ ∴ ـ ٥ ⩽ س-١ ⩽ ٥

∴ ـ ٥+١ ⩽ س ⩽ ٥+١ ∴ -٤ ⩽ س ⩽ ٦

∴ ـ٤ ⩽ س ⩽ ٦ ∴ س ∈ [ـ ٤ ، ٦]



مثـــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س | س | +٤ ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها ، ثم حل المعادلة: س | س | +٤ = ٢(س+٢) بيانياً

الحـــــــــل

د(س) = { س^٢ + ٤ : س ⩾ ٠ إزاحة رأسية مقدارها |٤| فى اتجاه و ص→ ، ـ س^٢ + ٤ : س < ٠ انعكاس للمنحنى ،إزاحة |٤| فى اتجاه و ص→ }

المدى ع

د متزايدة على مجالها

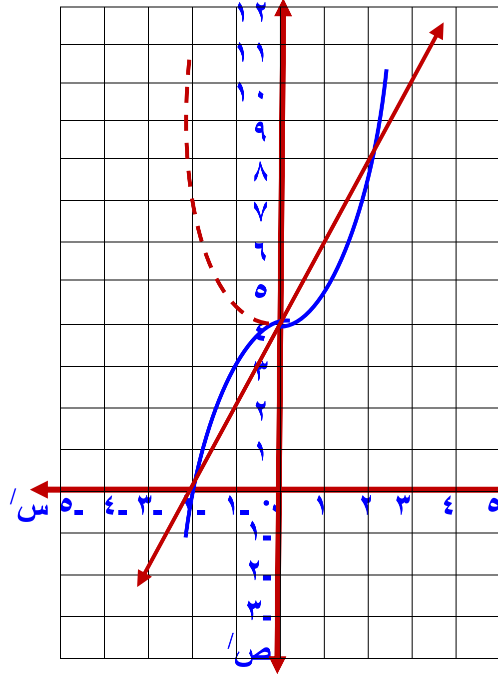
الحل البيانى

نرسم د١(س) = س | س | +٤

ونرسم د٢(س) = ٢(س+٢)

ومن الرسم:الاحداثى السينى لنقط تقاطع الدالتين

مجموعة الحل = { -٢ ، ٠ ، ٢ }



مثال٥ ارسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{٣ س - ٢}{س - ١}$ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحـــــــــل

د(س) = $\frac{٣(س - ١) - ٢ + ٣}{س - ١}$ = $\frac{٣(س - ١) + ١}{س - ١}$

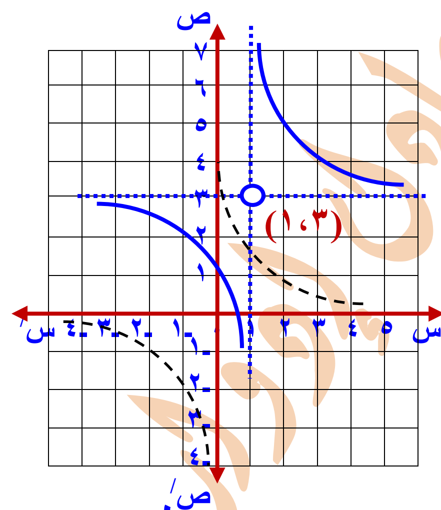
د(س) = $\frac{١}{س - ١}$ + ٣

إزاحة أفقية |١| ورأسية |٣| نقطة التماثل (١ ، ٣)

المجال = ح - {١} ، المدى = ع - {٣}

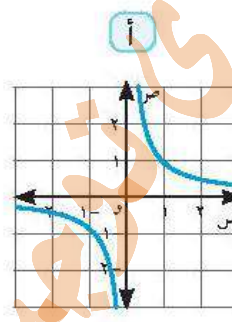
د متناقصة فى] - ∞ ،١[،] ١ ، ∞ [

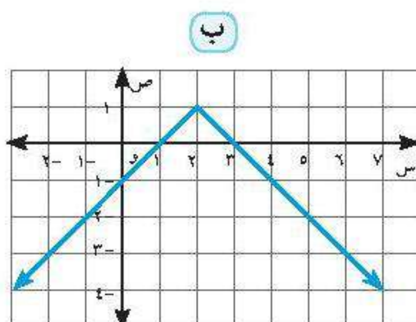
الدالة لا فردية ولا زوجية

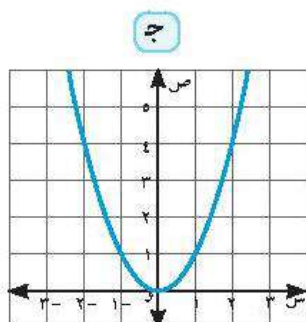


تمـــارين عامة على الوحدة

١) فى كل من الأشكال البيانية الآتية عين مدى الدالة، وابحث اطرادها ثم بين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

أ


ب


ج


٢) أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية:

أ $د_1(س) = ٢س^٣ + س + ٣$ ب $د_2(س) = \frac{٢س}{س^٢ - ٢س - ٣}$ ج $د_3(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ١}$

٣) استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = |س|$ لتمثيل الدالة ر بيانيًّا ثم ابحث اطرادها:

أ $ر(س) = |س - ١|$ ب $ر(س) = ٢ - |س|$ ج $ر(س) = |س + ٢| - ٣$

٤) استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^٢$ لتمثيل مايأتى بيانيًّا:

أ $ر_1(س) = س^٢ - ٣$ ب $ر_2(س) = ٢ - س^٢$ ج $ر_3(س) = (س - ٢)^٢ + ١$

ثم أوجد معادلة محور التماثل لكل منها.

٥) استخدم منحنى الدالة د، حيث $د(س) = س^٣$ لتمثيل مايلي بيانيًّا:

أ $ر_1(س) = (س + ٣)^٣$ ب $ر_2(س) = -(س - ١)^٣$ ج $ر_3(س) = (س - ١)^٣ - ٢$

ثم عين نقطة تماثل منحنى الدالة .

٦) استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$ لتمثيل ما يلي بيانيًّا:

أ $د_1(س) = \frac{١}{س} + ١$ ب $د_2(س) = \frac{١}{س} - ٢$ ج $د_3(س) = \frac{١}{س - ٢}$

٧) أوجد مجموعة حل المعادلات والمتباينات الآتية بيانيًّا .

أ $|س - ٥| = ٣$ ب $|س - ٥| < ٣$ ج $|س + ٣| \geq ٢$

٨) أوجد مجموعة حل المعادلات والمتباينات الآتية جبريًّا:

أ $|س - ٣| = ٤$ ب $|٢س - ٣| = ٥$ ج $|٢س - ٥| \leq ٧$

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

مذكرة الجبر

الأسس و اللوغاريتمات

الصف الثاني الثانوى

القسم العلمى

الفصل الدراسى الأول ٢٠٢٠

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

- الأسس الكسرية
- الدالة الأسية وتطبيقتها
- المعادلات الأسية
- الدالة العكسية
- الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى
- بعض خواص اللوغاريتمات

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

الأسس الصحيحة

تعريف١ ∀ س ∈ ع ، ن ∈ ص⁺ فإن :

$س^{ن}$ = س × س × س × ... إلى ن من العوامل.

مثـال١ $س^{١٥}$ = س × س × س × ... إلى ١٥ عوامل

تعريف٢ ∀ س ∈ ع* = ح – {٠} فإن $س^{صفر}$ = ١

مثـال٢ $(٣)^{صفر}$ = ١ ، $(–٢)^{صفر}$ = ١ ، $-(١٣)^{صفر}$ = -١

تعريف٣ ∀ س ∈ ع – {٠} ، ن ∈ ص⁺ فإن $س^{-ن} = \frac{١}{س^{ن}}$

مثـال٣ $س^{-٥} = \frac{١}{س^{٥}}$

قوانين الأسس الصحيحة.

∀ م ، ن ، ك ∈ ص فإن :

(١) $س^{م} × س^{ن} = س^{م+ن}$ ∀ س ∈ ع .

(٢) $س^{م} ÷ س^{ن} = س^{م-ن}$ ∀ س ∈ ع – {٠}.

(٣) $(س^{م})^{ن} = س^{م×ن}$ ∀ س ∈ ع.

(٤) $(س^{م} × س^{ن})^{ك} = س^{مك} × س^{نك}$ ∀ س ، ص ∈ ع.

(٥) $\left(\frac{س^{م}}{س^{ن}}\right)^{ك} = \frac{س^{مك}}{س^{نك}}$ ∀ س ∈ ع ، ص ∈ ع – {٠}.

مثــال١: اختصر لأبسط صورة $\frac{(٦٤)^{٣} × (٢٧)^{٤}}{(١٤٤)^{٥}}$

الحـــل

المقدار = $\frac{[(٢)^{٦}]^{٣} × [(٣)^{٣}]^{٤}}{[(٢)^{٤} × (٣)^{٢}]^{٥}} = \frac{(٢)^{١٨} × (٣)^{١٢}}{(٢)^{٢٠} × (٣)^{١٠}} = \frac{(٣)^{٢}}{(٢)^{٢}} = \frac{٩}{٤}$

مثــ٢ــال: اختصر لأبسط صورة $\frac{(٤)^{٢ن+١} \times (٢)^{١-ن}}{(٨)^{ن+٢}}$

الحـــــــــــل

المقدار = $\frac{[(٢)^{٢}]^{٢ن+١} \times (٢)^{١-ن}}{[(٢)^{٣}]^{ن+١}} = \frac{(٢)^{٤ن+٢} \times (٢)^{١-ن}}{(٢)^{٣ن+٣}}$

$= (٢)^{٤ن+٢+١-ن-٣ن-٣} = (٢)^{\text{صفر}} = ١$

مثــ٣ــال: اختصر لأبسط صورة $\frac{(١٢)^{٢} \times (٨١)^{-٢}}{١٦ \times (٢٧)^{-٣}}$

الحـــــــــــل

المقدار = $\frac{[(٢)^{٢} \times ٣]^{٢} \times [(٣)^{٤}]^{-٢}}{(٢)^{٤} \times [(٣)^{٣}]^{-٣}} = \frac{\cancel{(٢)^{٤}} \times (٣)^{٢} \times (٣)^{-٨}}{\cancel{(٢)^{٤}} \times (٣)^{-٩}}$

$= (٣)^{٢-٨+٩} = (٣)^{٣} = ٢٧$

الجذر النونى : للعدد أ هو العملية العكسية لرفع هذا العدد للقوة (ن) ويرمز للجذر النونى للعدد أ بالرمز $\sqrt[ن]{أ}$ ويسمى ن دليل الجذر [$\sqrt[ن]{أ}$ = س إذا كان $س^{ن}$ = أ]

ملاحظات:

المعادلة: $س^{ن}$ = أ لها ن من الجذور وإذا كان

(١) ن عدد زوجى ، أ > ٠ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية (عندما: ن > ٢) [$\sqrt[٤]{٢٥}$ = ±٥]

(٢) ن عدد زوجى ، أ < ٠ ليس لها جذور حقيقية أى أن الجذور أعداد مركبة غير حقيقية [حل: $س^{٢}$ = ـ ٦٤ هو س = $\sqrt{\pm ٦٤}$ = ± ٤ت]

(٣) ن عدد فردى ، أ ∈ ع ـ {٠} لها جذر حقيقى وحيد وباقى الجذور أعداد مركبة [حل: $س^{٣}$ = ـ ٢٧ هو س = $\sqrt[٣]{-٢٧}$ = ـ٣ وجزرين مركبين]

مثـــ٤ـــال: مجموعة حل المعادلة $(س - ٣)^{٧} = ١٢٨$ فى ح

الحـــل: ∴ $(س - ٣) = \sqrt[٧]{١٢٨} = ٢$ ⟸ $س - ٣ = ٢$ ∴ م.ح = {٥}

مثـــ٥ـــال: مجموعة حل المعادلة $٣ س^{٤} - ٥ = ٢٣٩$ فى ح

الحـــل: $٣ س^{٤} = ٢٣٩ + ٥ = ٢٤٣$ ⟸ $س^{٤} = ٢٤٣ ÷ ٣ = ٨١$

∴ $س = \sqrt[٤]{٨١} = ± ٣$ ∴ م.ح = {-٣ ، ٣}

مثـــ٦ـــال: مجموعة حل المعادلة $س^{٣} = -٦٤$ فى ح

الحـــل: ∴ $س = \sqrt[٣]{-٦٤} = -٤$ ∴ م.ح = {-٤}

مثـــ٧ـــال: مجموعة حل المعادلة $س^{٤} = -٦٢٥$ فى ح

الحـــل: $-٦٢٥ < ٠$ ، القوة ٤ زوجي ∴ م.ح = ∅

الأسس الكسرية

تعريف ١ : $س^{\frac{١}{ن}} = ص$ ⟸ $س = ص^{ن}$ حيث س ، ص ∈ ع⁺ ويكون $س^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{س}$

فمثلاً: $(١٦)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{١٦} = ٤$ ، $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$ ، $(١٢٨)^{\frac{١}{٧}} = \sqrt[٧]{١٢٨} = ٢$

تعريف ٢ : إذا كان س ∈ ع⁺ ، م ∈ ص ، ن عدد صحيح أكبر من الواحد.

فإن $س^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{س^{م}} = (\sqrt[ن]{س})^{م}$

ملاحظة: $\sqrt[ن]{س^{م}} = \sqrt[نك]{س^{مك}}$

فمثلاً: $(٨)^{\frac{٢}{٣}} = (\sqrt[٣]{٨})^{٢} = (٢)^{٢} = ٤$ ، $(٨١)^{-\frac{٣}{٤}} = (\sqrt[٤]{٨١})^{-٣} = (٣)^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

ملاحظات : * إذا كان أ ∈ ع⁻ : فإن $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ} ∈ ع$ إذا كان ن عدداً فردياً

$أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ} \notin ع$ إذا كان ن عدداً زوجياً

فمثلاً: $(-٢٥)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{-٢٥} \notin ح$ ، $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{-٢٧} = -٣ ∈ ع$

* إذا كان $س^{ن} = ۴^{م}$ فإن: $س = ۴^{\frac{م}{ن}}$ حيث م عدد فردى
* إذا كان $س^{ن} = ۴^{م}$ فإن: $س = \pm ۴^{\frac{م}{ن}}$ حيث م عدد زوجى

بشرط أن يكون م ، ن ليس بينهما عامل مشترك

استخدام المقياس : $\sqrt[ن]{۴^{ن}} = |۴|$ إذا كان ن عدد زوجى ، $\sqrt[ن]{۴^{ن}} = ۴$ إذا كان ن عدد فردى

مثـــال١ : أوجد فى أبسط صورة

(۴) $\sqrt[٥]{(٢-\sqrt{٥})^{٥}}$ (ب) $\sqrt[٤]{(٢-\sqrt{٣})^{٤}}$ (حـ) $\sqrt[٦]{(١-\sqrt{٧})^{٦}}$

الحـــــــــــل

(۴) $\sqrt[٥]{(٢-\sqrt{٥})^{٥}} = (٢-\sqrt{٥})$: القوى عدداً فردياً

(ب) $\sqrt[٤]{(٢-\sqrt{٣})^{٤}} = |٢-\sqrt{٣}| = ٢-\sqrt{٣}$: $٢ > \sqrt{٣}$

(حـ) $\sqrt[٦]{(١-\sqrt{٧})^{٦}} = |١-\sqrt{٧}| = \sqrt{٧} - ١$: $١ < \sqrt{٧}$

مثـــال٢ : أوجد فى أبسط صورة

(۴) $\sqrt[٥]{٣٢ ۴^{٥} ب^{١٠}}$ (ب) $-\sqrt[٤]{٨١ س^{٤} ص^{١٢}}$ (حـ) $\sqrt[٣]{(٧+\frac{١}{٧})^{٦}}$

الحـــــــــــل

(۴) $\sqrt[٥]{٣٢ ۴^{٥} ب^{١٠}} = \sqrt[٥]{٣٢} \times \sqrt[٥]{۴^{٥}} \times \sqrt[٥]{ب^{١٠}} = ٢ ۴ ب^{٢}$

(ب) $-\sqrt[٤]{٨١ س^{٤} ص^{١٢}} = -\sqrt[٤]{٨١} \times \sqrt[٤]{س^{٤}} \times \sqrt[٤]{ص^{١٢}} = -٣ س ص^{٣}$

(حـ) $\sqrt[٣]{(٧+\frac{١}{٧})^{٦}} = (٧ + \frac{١}{٧})^{٢} = (٧)^{٢} + ٢ + (\frac{١}{٧})^{٢} = ٥١ + (\frac{١}{٧})^{٢} = ٥١ \frac{١}{٤٩}$

مثـــال٣ اختصر لأبسط صورة : $\frac{(٢ ۴^{٢} ب^{-٤})^{٤} \times (٥ ۴ ب^{-٧})^{-٢}}{(٤ ۴^{-٣} ب)^{-٢}}$

الحـــــــــــل

المقدار $= \frac{٢^{٤} \times ۴^{٨} \times ب^{-١٦} \times ٥^{-٢} \times ۴^{-٢} \times ب^{١٤}}{(٢^{٢})^{-٢} \times ۴^{٦} \times ب^{-٢}}$

$= \frac{٢^{٤} \times ۴^{٨} \times ب^{-١٦} \times ٥^{-٢} \times ۴^{-٢} \times ب^{١٤}}{(٢)^{-٤} \times ۴^{٦} \times ب^{-٢}}$

$$= (2)^{4+4} \times (5)^{-2} \times \text{أ}^{8-2-6} \times \text{ب}^{-16+14+2} = \frac{256}{25} \times \text{أ}^{0} \times \text{ب}^{0} = \frac{256}{25}$$

مثـــال ٤ اختصر لأبسط صورة : $\dfrac{(6)^{4\text{ن}} \times (5)^{7\text{ن}}}{(15)^{4\text{ن}} \times (10)^{3\text{ن}}}$

الحـــــــل

المقدار $= \dfrac{(2\times 3)^{4\text{ن}} \times (5)^{7\text{ن}}}{(3\times 5)^{4\text{ن}} \times (2\times 5)^{3\text{ن}}} = \dfrac{2^{4\text{ن}} \times 3^{4\text{ن}} \times 5^{7\text{ن}}}{3^{4\text{ن}} \times 5^{4\text{ن}} \times 2^{3\text{ن}} \times 5^{3\text{ن}}}$

$$= (5)^{7\text{ن}-4\text{ن}-3\text{ن}} \times (3)^{4\text{ن}-4\text{ن}} \times (2)^{4\text{ن}-3\text{ن}} = (5)^{0} \times (3)^{0} \times (2)^{\text{ن}} = (2)^{\text{ن}}$$

مثـــال ٥ اختصر لأبسط صورة : $\dfrac{(2)^{1-2\text{ن}} \times (432)^{\text{ن}} \times 3^{-\text{ن}}}{(3)^{\text{ن}-4} \times (12)^{\text{ن}-1}}$

الحـــــــل

المقدار $= \dfrac{(2)^{1-2\text{ن}} \times (2^{4} \times 3^{3})^{\text{ن}} \times 3^{-\text{ن}}}{(3)^{\text{ن}-4} \times (2^{2} \times 3)^{\text{ن}-1}}$

$$= \frac{(2)^{1-2\text{ن}} \times 2^{4\text{ن}} \times 3^{3\text{ن}} \times 3^{-\text{ن}}}{(3)^{\text{ن}-4} \times 2^{2\text{ن}-2} \times 3^{\text{ن}-1}}$$

$$= (2)^{1-2\text{ن}+4\text{ن}-2\text{ن}+2} \times (3)^{3\text{ن}-\text{ن}-\text{ن}+4-\text{ن}+1} = (2)^{3} \times (3)^{5}$$

$$= 8 \times 243 = 1944$$

مثـــال ٦: أثبت أن : $\dfrac{(16)^{\text{س}-\frac{1}{4}} \times (9)^{\text{س}+\frac{1}{2}}}{(8)^{\text{س}-1} \times (18)^{\text{س}+2}} = \dfrac{1}{27}$

الحـــــــل

المقدار $= \dfrac{((2)^{4})^{\text{س}-\frac{1}{4}} \times ((3)^{2})^{\text{س}+\frac{1}{2}}}{((2)^{3})^{\text{س}-1} \times (2\times(3)^{2})^{\text{س}+2}} = \dfrac{(2)^{4\text{س}-1} \times (3)^{2\text{س}+1}}{(2)^{3\text{س}-3} \times (3)^{2\text{س}+4} \times (2)^{\text{س}+2}}$

$$= (2)^{4\text{س}-1-3\text{س}+3-\text{س}-2} \times (3)^{2\text{س}+1-2\text{س}-4} = (2)^{0} \times (3)^{-3} = \frac{1}{27}$$

مثـ٧ـال اختصر لأبسط صورة : $\dfrac{5 \times (3)^{2س} - 7\,(3)^{2س-1}}{(3)^{2س+2} + (3)^{2س-1}}$

الحـــــل

المقدار $= \dfrac{5 \times (3)^{2س} - 7\,(3)^{2س} \times (3)^{-1}}{(3)^{2س} \times (3)^{2} + (3)^{2س} \times (3)^{-1}} = \dfrac{(3)^{2س}\left(5 - \frac{7}{3}\right)}{(3)^{2س}\left(9 + \frac{1}{3}\right)}$

بضرب البسط والمقام × ٣ ينتج $= \dfrac{15 - 7}{27 + 1} = \dfrac{8}{28} = \dfrac{2}{7}$

مثـ٨ـال اختصر: $\left(\text{أ}^{\frac{1}{2}}\ \text{ب}^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{4}{3}} \times \left(\text{ب}^{-\frac{4}{27}}\ \text{ج}^{\frac{2}{3}}\right)^{3} \times \left(\text{ج}^{2}\ \text{أ}^{\frac{7}{3}}\right)^{-1}$

الحـــــل

المقدار $= \text{أ}^{\frac{2}{3}}\ \text{ب}^{\frac{4}{9}} \times \text{ب}^{-\frac{4}{9}} \times \text{ج}^{2} \times \text{ج}^{-2}\ \text{أ}^{-\frac{7}{3}} = \text{ب}^{0}\ \text{ج}^{0}\ \text{أ}^{-\frac{5}{3}} = \text{أ}^{-\frac{5}{3}}$

مثـ٩ـال: أثبت أن : $(18)^{\frac{3}{2}} \times (225)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{6}{5}$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= \left(2 \times (3)^{2}\right)^{\frac{3}{2}} \times \left((3)^{2} \times (5)^{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left((2)^{-1} \times (3)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= (2)^{\frac{3}{2}} \times (3)^{3} \times (3)^{-1} \times (5)^{-1} \times (2)^{-\frac{1}{2}} \times (3)^{-1}$

$= (2)^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} \times (3)^{3-1-1} \times (5)^{-1} = (2)^{1} \times (3)^{1}\ (5)^{-1} = \frac{6}{5}$

مثـ١٠ـال رتب تصاعدياً $\sqrt[3]{5}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt[4]{8}$

الحـــــل

المضاعف المشترك الأدنى للأعداد ٣ ، ٢ ، ٤ هو ١٢ نحول الجذور للدليل ١٢

$\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{(5)^{4}} = \sqrt[12]{625}$

$\sqrt{3} = \sqrt[12]{(3)^{6}} = \sqrt[12]{729}$

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

$\sqrt[٤]{٨} = \sqrt[١٢]{(٨)^{٣}} = \sqrt[١٢]{٥١٢}$

الترتيب هو $\sqrt[١٢]{٥١٢}$ ، $\sqrt[١٢]{٦٢٥}$ ، $\sqrt[١٢]{٧٢٩}$ هو $\sqrt[٤]{٨}$ ، $\sqrt[٣]{٥}$ ، $\sqrt{٣}$

مثـ١١ـال حل المعادلة $\text{س}^{٣} = ١٢٥$

الحـــــــــــل

$\text{س} = \sqrt[٣]{١٢٥} = \left((٥)^{٣}\right)^{\frac{١}{٣}} = ٥$ ∴ م.ح = { ٥ }

مثـ١٢ـال حل المعادلة : $\sqrt[٣]{(\text{س} - ١)^{٥}} = ٣٢$

الحـــــــــــل

$(\text{س} - ١)^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢$ D $(\text{س} - ١) = [(٢)^{٥}]^{\frac{٣}{٥}} = (٢)^{٣} = ٨$

∴ م.ح = { ٥ }

مثـ١٣ـال حل المعادلة : $\text{س}^{\frac{٤}{٣}} - ٥\,\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + ٤ = ٠$

الحـــــــــــل

$(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ١)(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٤) = ٠$

∴ $(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ١) = ٠$ أ، $(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٤) = ٠$

∴ $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} = ١ \Leftarrow \text{س} = (١)^{\frac{٣}{٢}}$ ∴ س = ١

أ، $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} = ٤ \Leftarrow \text{س} = [(٢)^{٢}]^{\frac{٣}{٢}}$ ∴ $\text{س} = (٢)^{٣} = ٨$ ∴ م.ح = { ١ ، ٨ }

مثـ١٤ـال حل المعادلة $\sqrt[٥]{١٦} \times (٤)^{\text{س} - \frac{١}{٥}} = ٢$

الحـــــــــــل

المعادلة $(٢^{٤})^{\frac{١}{٥}} \times (٢^{٢})^{\text{س} - \frac{١}{٥}} = ٢$

∴ $(٢)^{\frac{٤}{٥}} \times (٢)^{٢\text{س} - \frac{٢}{٥}} = ٢$

∴ $(٢)^{٢\text{س} + \frac{٢}{٥}} = (٢)^{١}$ ∴ $٢\text{س} + \frac{٢}{٥} = ١$ ∴ $٢\text{س} = ١ - \frac{٢}{٥} = \frac{٣}{٥}$

بضرب كل من الطرفين × $\frac{١}{٢}$ ∴ $\text{س} = \frac{٣}{١٠}$

مثـال ١٥ حل المعادلة $(\text{س} - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}} = (٨١)^{-\frac{١}{٤}}$

الحـــل

$(\text{س} - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}} = ((٣)^{٤})^{-\frac{١}{٤}} = (٣)^{-١}$

∴ $(\text{س} - \frac{١}{٢}) = [(٣)^{-١}]^{٣} = (٣)^{-٣}$ ∴ $(\text{س} - \frac{١}{٢}) = \frac{١}{٢٧}$

∴ $\text{س} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢٧} = \frac{٢٩}{٥٤}$

مثـال ١٦ إذا كان $\text{س}^{\frac{٣}{٤}} = ٢\,\text{ص}^{\frac{٥}{٣}} = ٦٤$ **فأوجد قيمة: س ـ ١٠ ص**

الحـــل

$\text{س}^{\frac{٣}{٤}} = ٦٤$ ∴ $(\text{س})^{\frac{٣}{٤}} = (٢)^{٦} \Leftarrow \text{س} = [(٢)^{٦}]^{\frac{٤}{٣}} = (٢)^{٨} = ٢٥٦$

$٢\,\text{ص}^{\frac{٥}{٣}} = ٦٤$ ∴ $\text{ص}^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢ = (٢)^{٥}$ ∴ $\text{ص} = [(٢)^{٥}]^{\frac{٣}{٥}} = ٨$

∴ س ـ ١٠ص = ٢٥٦ ـ ١٠ × ٨ = ٢٥٦ ـ ٨٠ = ١٧٦

مثـال ١٧ أختصر لأبسط صورة :

$$\frac{(٤٩)^{٣\text{س} + \frac{١}{٤}} \times (\sqrt{١٦})^{٣\text{س} - \frac{١}{٣}}}{(\sqrt[٣]{٤})^{٩\text{س} - ١} \times (٣٤٣)^{٢\text{س} + \frac{١}{٢}}}$$

الحـــل

$$\text{المقدار} = \frac{[(٧)^{٢}]^{٣\text{س} + \frac{١}{٤}} \times [(٢)^{٢}]^{٣\text{س} - \frac{١}{٣}}}{[(٢)^{\frac{٢}{٣}}]^{٩\text{س} - ١} \times [(٧)^{٣}]^{٢\text{س} + \frac{١}{٢}}} = \frac{(٧)^{٦\text{س} + \frac{١}{٢}} \times (٢)^{٦\text{س} - \frac{٢}{٣}}}{(٢)^{٦\text{س} - \frac{٢}{٣}} \times (٧)^{٦\text{س} + \frac{٣}{٢}}}$$

$$= (٧)^{٦\text{س} + \frac{١}{٢} - ٦\text{س} - \frac{٣}{٢}} = (٧)^{-١} = \frac{١}{٧}$$

مثـ١٨ـال أختصر لأبسط صورة :

$$\frac{(٦٢٥)^{\frac{١}{٤}\text{س}} \times (٢٧)^{\text{س} - \frac{١}{٣}}}{(٢٢٥)^{\frac{٣}{٢}\text{س}} \times \sqrt{٢٥}}$$

الحـــــــل

$$\text{المقدار} = \frac{[(٥)^{٤}]^{\frac{١}{٤}\text{س}} \times [(٣)^{٣}]^{\text{س} - \frac{١}{٣}}}{[(٣)^{٢} \times (٥)^{٢}]^{\frac{٣}{٢}\text{س}} \times ٥} = \frac{(٥)^{٣\text{س}} \times (٣)^{٣\text{س} - ١}}{(٣)^{٣\text{س}} \times (٥)^{٣\text{س}} \times ٥}$$

$$= (٣)^{٣\text{س} - ١ - ٣\text{س}} \times (٥)^{-١} = (٣)^{-١} \times (٥)^{-١} = \frac{١}{١٥}$$

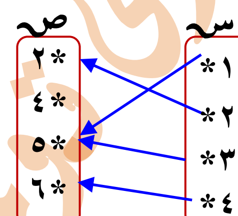
تمارين على المعادلات الأسية

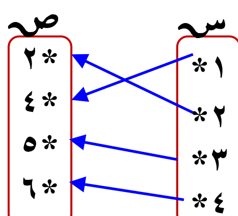
١	أوجد قيمة كلٍّ ممايأتى فى أبسط صورة: أ $(١٦)^{\frac{٣}{٤}}$ ب $(-٣٢)^{\frac{٣}{٥}}$ ج $٢٧^{-\frac{٤}{٣}}$ د $(\frac{١}{٨})^{\frac{٢}{٣}} + (\frac{١}{٤})^{\frac{١}{٢}}$ هـ $\frac{\sqrt[٤]{٤}}{\sqrt{٢}}$ و $\frac{١}{(٢^{-٢} \times ٤^{\frac{١}{٢}} \times ٨^{\frac{٢}{٣}})^{-٢}}$
٢	أوجد فى أبسط صورة ناتجَ العمليات لآتية: أ $(ا^{-\frac{٢}{٣}})^{-٣}$ ب $\sqrt[٣]{\text{س}} \times \text{س}^{\frac{١}{٣}}$ ج $(٣^{٢} + ٤^{٢})^{\frac{١}{٢}}$ د $(\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{ص}^{\frac{١}{٢}})(\text{س}^{\frac{١}{٢}} - \text{ص}^{\frac{١}{٢}})$ هـ $(\text{س}^{\frac{١}{٣}} - \text{ص}^{\frac{١}{٣}})(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + \text{س}^{\frac{١}{٣}}\text{ص}^{\frac{١}{٣}} + \text{ص}^{\frac{٢}{٣}})$
٣	اختصر كُلًّا ممايأتى لأبسط صورة : أ $\sqrt[٥]{٢٤٣} + \sqrt[٩]{٥١٢}$ ب $(\frac{١٦}{٨١})^{\frac{١}{٤}} \times (\frac{٧٢٩}{٨})^{\frac{١}{٣}}$ ج $(١٦)^{\frac{٣}{٤}} \div (٨)^{\frac{٢}{٣}}$ د $(٢٧)^{\frac{٢}{٣}} - (٦٤)^{\frac{٥}{٦}}$ هـ $\sqrt{٠,١} \times \sqrt[٣]{٠,٢١٦} \times \sqrt{٢,٥}$ و $\frac{١٦^{\text{س} - \frac{١}{٤}} \times ٩^{\text{س} + \frac{١}{٢}}}{٨^{\text{س} - ١} \times ١٨^{\text{س} + ٢}}$

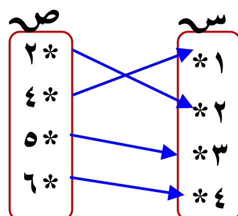
الدالة العكسية

إذا كانت د أحادية من س إلى ص فإن: الدالة $د^{-١}$ تسمى دالة عكسية للدالة د من ص إلى س إذا كان: لكل (ٲ ، ب) ∈ بين د فإن (ب ، ٲ) ∈ $د^{-١}$

فمثلاً:







د: س ⟵ ص ليست أحادية لا يمكن إيجاد دالة عكسية لها	الدالةد: س ⟵ ص لها $د^{-١}$ عكسية د={(١،٤)،(٢،٢) ، (٣،٥)، (٤،٦)}	$د^{-١}$: ص ⟵ س دالة عكسية للدالة د $د^{-١}$={(٤،١)، (٢،٢) ، (٥،٣)، (٦،٤)}

مثـــ١ـــال: اى من الدوال الآتية لها دالة عكسية . ثم أوجد الدالة العكسية إن أمكن

ٲ) $د_١$ = { (ـ٤ ، ١) ، (ـ٣ ، ٢) ، (١ ، ١) ، (٠ ، ٥)}

ب) $د_٢$ = { (ـ١ ، ٢) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٢)}

حـ) $د_٣$ = ٢س + ٥ : س = { ـ١ ، ١ ، ٣ }

الحـــــــــل

ٲ) $د_١$ لها دالة عكسية ، $د_١^{-١}$ = {(١ ، ـ٤) ، (٢ ، ـ٣) ، (١ ، ١) ، (٥ ، ٠)}

ب) $د_٢$ ليس لها دالة عكسية :لأن العنصران ـ١ ، ٣ لهما نفس الصورة (الدالة غير أحادية)

حـ) $د_٣$ = { (ـ١ ، ٣) ، (١ ، ٧) ، (٣ ، ١١) } لها دالة عكسية

$د_٣^{-١}$ = { ٣ ، ـ١) ، (٧ ، ١) ، (١١ ، ٣) }

ملاحظات:

(١) يمكن إيجاد قاعدة $د^{-١}$ مباشرة بتبديل المتفيرين س ، ص ثم إيجاد ص بدلالة س

فمثلاً : فى المثال السابق د = ص = ٢س + ٥ وبتبديل المتغيرين

س = ٢ص + ٥ ⟸ ٢ص = س ـ ٥ ∴ $د^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$ (س ـ ٥)

(٢) $د^{-١}$ (س) ≠ $\frac{١}{د(س)}$ حيث : $\frac{١}{٢}$ (س ـ ٥) ≠ $\frac{١}{٢س + ٥}$

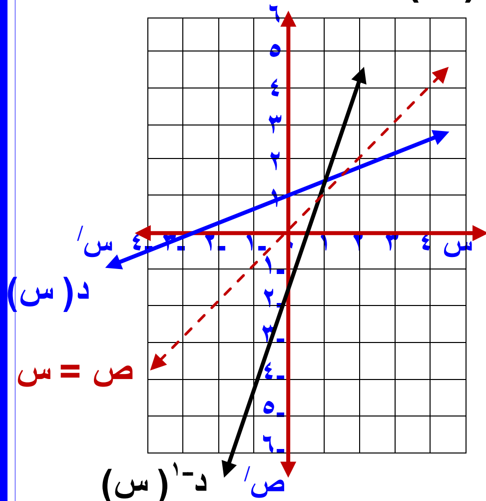
مثـــ٢ـــال: أوجد الدالة العكسية للدالة د(س) = $\frac{١}{٢}$ س ـ ٣ ومثل الدالة ومعكوسها بيانياً فى شكل واحد

الحـــــــل

لإيجاد الدالة العكسية للدالة ص = $\frac{١}{٣}$ س + ١ بتبديل المتغيرين ⇐ س = $\frac{١}{٣}$ ص + ١

∴ $\frac{١}{٣}$ ص = س ـ ١ ∴ ص = ٣س ـ ٣ ∴ د$^{-١}$ (س) = ٣س ـ ٣

د(س) = $\frac{١}{٣}$ س + ١				د$^{-١}$ (س) = ٣س ـ ٣			
س	ـ٣	٠	٣	س	٠	١	٢
د(س)	٠	١	٢	د$^{-١}$(س)	ـ٣	٠	٣



نلاحظ : أن الدالة د(س) والدالة د$^{-١}$(س)

متماثلتان بالنسبة للمستقيم ص = س

أى: أن د ، د$^{-١}$ كلاً منهما صورة للأخرى بالانعكاس فى المستقيم ص = س

خواص الدالة العكسية:

(١) يقال إن د ، ر عكسية للأخرى إذا كان (د ○ ر) (س) = س ، (ر ○ د)(س) = س

(٢) مجال الدالة د = مدى الدالة العكسية د$^{-١}$ (س) ،

مدى الدالة د = مجال الدالة العكسية د$^{-١}$ (س)

مثـــ٣ـــال: حقق أن كلاً من : د ، ر حيث د(س) = ٢س ـ٣ ، ر(س) = $\frac{س + ٣}{٢}$ دالة عكسية للأخرى

الحـــــــل

∵ (د ○ ر) (س) = د (ر(س)) = د ($\frac{س + ٣}{٢}$) = ٢ ($\frac{س + ٣}{٢}$) ـ ٣ = س،

(ر ○ د) (س) = ر(د(س)) = ر (٢س ـ٣) = $\frac{٢س ـ ٣ + ٣}{٢}$ = س

∴ د ، ر دالة عكسية للأخرى

مثــ٤ــال: حقق أن كلاً من : د ، ر حيث د(س) = س^{٢} + ٤ : س ⩾ ٠ ،
ر(س) = $\sqrt{س - ٤}$ دالة عكسية للأخرى . ثم أوجد مجال ومدى كلاً منهما

الحــــــــل

∵ (د ○ ر) (س) = د (ر(س)) = د ($\sqrt{س - ٤}$) = (س ـ ٤ + ٤) = س،

(ر ○ د) (س) = ر(د(س)) = ر (س^{٢} + ٤) = $\sqrt{س^{٢} - ٤ + ٤}$ = $\sqrt{س^{٢}}$ = | س |

∵ س ⩾ ٠ ∴ (ر ○ د) (س) = س ∴ د ، ر دالة عكسية للأخرى

الدالة د(س) المجال [٠ ، ∞ [والمدى لها = [٤ ، ∞ [

الدالة ر (س) المجال [٤ ، ∞ [والمدى لها = [٠ ، ∞ [

مثــ٥ــال: إذا كانت الدالتين : د ، ر حيث : د(س) = ٢س + أ ، ر(س) = ب س +٣
دالة عكسية للأخرى . فما قيمة كلاً من أ ، ب ؟

الحــــــــل

∵ د (س) = ص = ٢ س + أ بتبديل المتغيرين ∴ س = ٢ ص + أ

⇐ ٢ص = س ـ أ ⇐ ص = $\frac{س}{٢}$ ـ $\frac{أ}{٢}$ ∴ د$^{-١}$(س) = $\frac{س}{٢}$ ـ $\frac{أ}{٢}$

∵ ر(س) = د$^{-١}$(س) ∴ ب س +٣ = $\frac{س}{٢}$ ـ $\frac{أ}{٢}$ ∴ ب = $\frac{١}{٢}$ ، أ = ـ٦

تمارين على الدالة العكسية

١	أ إذا كانت الدالة د= {(١ ، ٤)، (٢ ، ـ٣)، (٣ ، ١)، (٤ ، ٠)} فإن د$^{-١}$ = ــــــــ ب صورة النقطة (٣ ، ١) بالانعكاس في المستقيم ص = س هي النقطة ــــــــ جـ إذا كانت د دالة أحادية وكان د(٣) = ٦ فإن د$^{-١}$ (٦) = ــــــــ
٢	أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية: أ د(س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٤ ب د(س) = ٨ س^{٣} ـ ١
٣	في كل مما يأتى عين المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية: أ د(س) = س^{٢} ب د(س) = $\frac{١}{٢}$ س
٤	في كل مما يأتى عين المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية: أ د(س) = س^{٢} ب د (س) = س^{٢} جـ د(س) = $\frac{١}{٢}$ س

الدالة الأسية

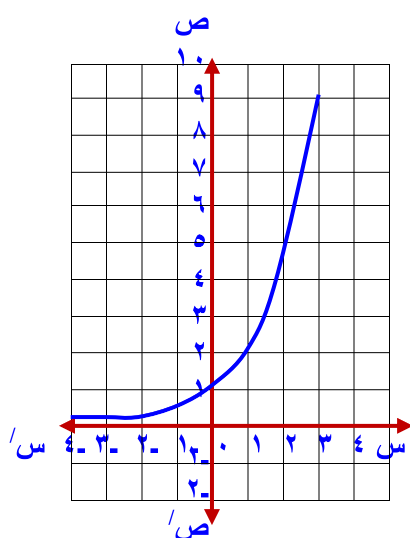
تعريف. إذا كان ٩ ∈ ع$^+$ − {١} فإن الدالة د : ع ← ع$^+$ حيث د(س) = ٩^{س}
تسمى دالة أسية أساسها ٩ .

التمثيل البيانى للدالة الأسية

إذا كانت: ٩ عدداً حقيقياً موجباً ≠ ١ فإن الدالة د : ع ⟵ ع$^+$ حيث
د (س) = ٩^{س} تسمى دالى أسية أساسها ٩

خواص الدالة الأسية

(١) إذا كانت : ٩ > ١



المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١)

المجال = ع

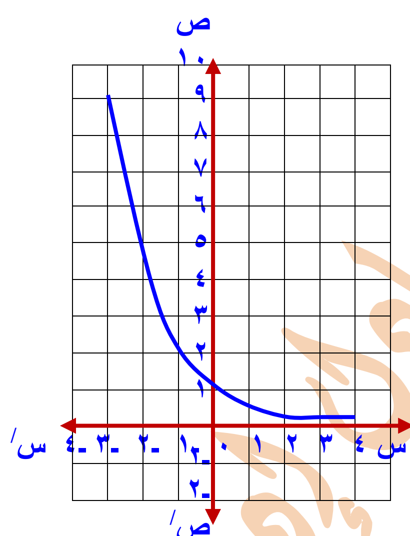
المدى = ع$_+$ ؛ أى] ٠ ، ∞ [

الدالة تزايدية على ع

الدالة ليست زوجية وليست فردية

المنحنى يقع بكامله فوق محور السينات

(٢) إذا كانت: ٠ < ٩ < ١



المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١)

المجال = ع

المدى = ع$_+$ ؛ أى] ٠ ، ∞ [

الدالة تناقصية على ع

الدالة ليست زوجية وليست فردية

المنحنى يقع بكامله فوق محور السينات

ملاحظة: إذا كانت د(س) = ٩^{س} فإن المنحنى ص = د (س + ب) أى ص = ٩$^{س+ب}$

يمثله ص = ٩^{س} بإزاحة أفقية مقدارها | ب |

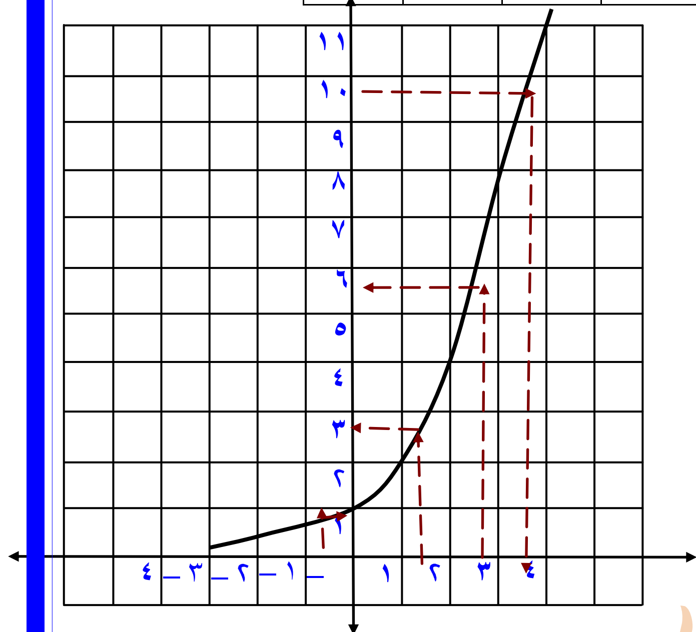
فى اتجاه وس ⟵ إذا كان : ب > ٠ ، فى اتجاه وس/ ⟵ إذا كان : ب < ٠

مثــ١ــال : أرسم منحنى الدالة د (س) = $٢^{س}$ في الفترة [ـ ٣ ، ٤] و من الرسم

أوجد : Ⓐ د (ـ٠,٥) Ⓑ د (١,٥) Ⓒ قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{٣٢}$

الحـــــــــل

س	٤	٣	٢	١	٠	ـ١	ـ٢	ـ٣
ص	١٦	٨	٤	٢	١	١	١	١



لإيجاد قيمة د (ـ ٠,٥) :

نرسم مستقيماً عند ـ٠,٥ يوازى محور الصادات

ليقابل المنحنى عند نقطة فنجدها ≃ ٠,٧

∴ د (ـ٠,٥) ≃ ٠,٧

لإيجاد قيمة د (١,٥) نرسم كما سبق

نجد أن : د (١,٥) ≃ ٢,٨

لإيجاد قيمة $\sqrt{٣٢}$ نلاحظ أن : ٣٢ = $(٢)^{٥}$

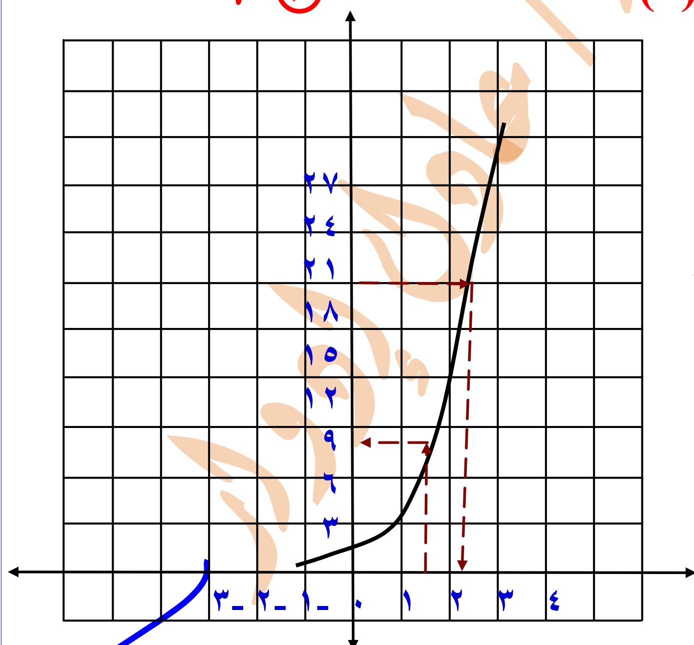
∴ نوجد د ($\frac{٥}{٢}$) = د (٢ $\frac{١}{٢}$)

و نرسم كما فى السابق ∴ قيمة $\sqrt{٣٢}$ ≃ ٥,٧

مثــ٢ــال ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ $ح^{+}$ حيث د(س) = $(٣)^{س}$ ومن الرسم أوجد

: Ⓐ د(١,٥) Ⓑ قيمة س إذا كان: $(٣)^{س}$ = ٨ Ⓒ $\sqrt{٣}$

س	٣	٢	١	٠	ـ١	ـ٢	ـ٣
ص	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$



المجال ح ، المدى $ح^{+}$ ، متزايدة على مجالها

Ⓐ د(١,٥) = $(٣)^{١,٥}$ ≃ ٥,٢

Ⓑ س ≃ ١,٩

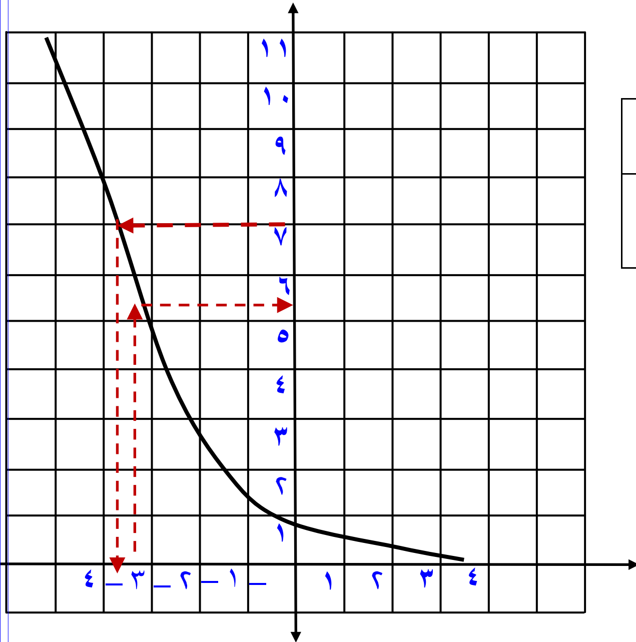
Ⓒ $\sqrt{٣}$ = $(٣)^{٠,٥}$ ≃ ١,٧

مثـ٣ـال : أرسم منحنى الدالة د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س + ١}$ في الفترة [ـ٣، ٤] و من الرسم

أوجد : (أ) د (ـ٥,٣) (ب) $\sqrt[٤]{٢}$ (جـ) حل المعادلة د (س) = ٧

الحـــــل

س	٣	٢	١	٠	ـ١	ـ٢	ـ٣	ـ٤
ص	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨



من الرسم : د (ـ٥,٣) ≃ ٥,٣

القيمة التقريبية للعدد ≃ $\sqrt[٤]{٢}$

قيمة س عندما د(س) = ٧

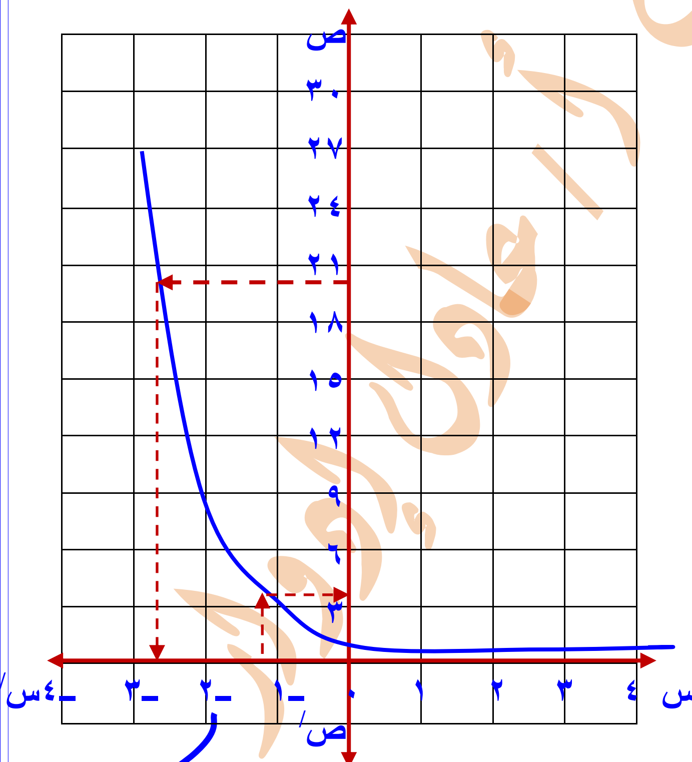
س ≃ ـ ٨,٢ تقريباً

مثـ٤ـال ارسم منحنى الدالة د : ع ⟵ $ع^{+}$ حيث د(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ ومن الرسم أوجد

(أ) د(−٢,١) (ب) قيمة س إذا كان: د(س) = ٢٠

الحـــــل

س	ـ٣	ـ٢	ـ١	٠	١	٢	٣
ص	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$



المجال ع ، المدى $ع^{+}$

، تناقصية على مجالها

(أ) د(−٢,١) ≃ ٣,٧

(ب) د(س) = ٢٠ من الرسم ≃ ـ ٨,٢

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

مثـــ٥ـــال : إذا كانت : د(س) = $(٢)^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د(س + ٥) + د(س + ٣)}{د(س + ٣) + د(س)} = \frac{٤٠}{٩}$

الحــــــــل

الطرف الأيمن = $\frac{(٢)^{س + ٥} + (٢)^{س + ٣}}{(٢)^{س + ٣} + (٢)^{س}} = \frac{(٢)^{س + ٣}\,[(٢)^{٢} + ١]}{(٢)^{س}\,[(٢)^{٣} + ١]}$

$= \frac{(٢)^{٣}\,[٤ + ١]}{[٨ + ١]} = \frac{٨ \times ٥}{٩} = \frac{٤٠}{٩}$

مثـــ٦ـــال : إذا كانت : د(س) = $(٣)^{س - ١}$ فأثبت أن : $\frac{د(س+١) \times د(س+٢)}{د(س+٣)} = د(س)$

الحــــــــل

الطرف الأيمن = $\frac{(٣)^{س - ١ + ١} \times (٣)^{س - ١ + ٢}}{(٣)^{س - ١ + ٣}} = \frac{(٣)^{س} \times (٣)^{س + ١}}{(٣)^{س + ٢}}$

$= \frac{(٣)^{٦س + ١}}{(٣)^{س + ٢}} = (٣)^{٦س + ١ - س - ٢} = (٣)^{س - ١} =$ د(س) الأيسر

مثـ٧ـال : إذا كانت : د(س) = $(٢)^{س}$ ، ر(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ فأوجد قيمة : $\frac{د(\frac{٥}{٢}) - ر(-٢)}{د(\frac{٣}{٢}) - ر(-١)}$

الحــــــــل

الطرف الأيمن = $\frac{(٢)^{\frac{٥}{٢}} - (\frac{١}{٢})^{-٢}}{(٢)^{\frac{٣}{٢}} - (\frac{١}{٢})^{-١}} = \frac{(٢)^{\frac{٥}{٢}} - (٢)^{٢}}{(٢)^{\frac{٣}{٢}} - (٢)}$

$= \frac{(٢)^{٢}\,[(٢)^{\frac{١}{٢}} - ١]}{(٢)\,[(٢)^{\frac{١}{٢}} - ١]} = ٢$

مثـ٨ـال : إذا كانت : د(س) = $(٥)^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د(س + ٤) - د(س + ٣)}{د(س + ٥) - د(س + ٤)} = \frac{٤٠}{٩}$

الحــــــــل

الطرف الأيمن = $\frac{(٥)^{س + ٤} - (٥)^{س + ٣}}{(٥)^{س + ٥} - (٥)^{س + ٤}} = \frac{(٥)^{س + ٣}\,[(٥) - ١]}{(٥)^{س + ٣}\,[(٥)^{٢} - ٥]} = \frac{٥ - ١}{٢٥ - ٥} = \frac{١}{٥}$

تطبيقات على الدالة الأسية:

[١] النمو الأسى : الدالة د: د(ن) = أ $(١ + ر)^{ن}$ تستخدم لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة : أ القيمة الأبتدائية ، ر النسبة المئوية ، ن الفترة الزمنية

الربح المركب: عند حساب جملة مبلغ (جـ) لمبلغ (أ) فى أحدى البنوك بربح سنوى ر

المبلغ تعطى بالعلاقة $\boxed{جـ = أ\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن\,س}}$

[٢] التضاؤل الأسى: الدالة د: د(ن) = أ $(١ - ر)^{ن}$ تستخدم لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة : أ القيمة الأبتدائية ، ر نسبة التضاؤل ، ن الفترة الزمنية

مثـــ٩ــال : أودع رجل مبلغ ٢٠٠٠ جنية فى أحدى البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة ٧٪ أوجد جملة المبلغ بعد مرور ١٠ سنوات فى كلاً من الحالات الآتية:

أ العائد السنوى ب العائد النصف سنوى جـ العائد شهرى

الحـــــــــل

أ ∵ العائد السنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ١ ∴ س = ١

∴ $جـ = أ\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن\,س} = ٢٠٠٠\left(١ + \frac{٠,٠٧}{١}\right)^{١٠} = ٣٩٣٤,٣$ جنية

ب ∵ العائد نصف سنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ٢ ∴ س = ٢

∴ $جـ = أ\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن\,س} = ٢٠٠٠\left(١ + \frac{٠,٠٧}{٢}\right)^{١٠×٢} = ٣٩٧٩,٦$ جنية

جـ ∵ العائد شهرى أى أن عدد فترات التقسيم = ١٢ ∴ س = ١٢

∴ $جـ = أ\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن\,س} = ٢٠٠٠\left(١ + \frac{٠,٠٧}{١٢}\right)^{١٠×١٢} = ٤٠١٩,٣$ جنية

مثـ١٠ـال : السعر السوقى لسيارة يتناقص طبقاً للعلاقة س = ١٦٠٠٠٠ $(٠,٩٥)^{ن}$ حيث س سع السيارة بالجنية ، ن الزمن بالسنةات أوجد :

أ سعر السيارة عند شرائها الجديدة ب سعر السيارة بعد مرور ٥ سنوات

الحـــــــــل

أ سعر السيارة عند شرائها الجديدة = ١٦٠٠٠٠ $(٠,٩٥)^{٠}$ = ١٦٠٠٠٠جنية

ب سعر السيارة بعد مرور ٥ سنوات = ١٦٠٠٠٠ $(٠,٩٥)^{٥}$ = ١٢٣٨٠٤,٩٥جنية

حل المعادلات الأسية جبرياً

(١) إذا كان : $\text{أ}^{\text{ن}} = ١$ فإن: ن = ٠ ، أ ∈ ع − {−١،٠،١}.

(٢) إذا كان : $\text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}}$ فإن: ن = م ، أ ∈ ع − {−١،٠،١}.

(٣) إذا كان : $\text{أ}^{\text{ن}} = \text{ب}^{\text{ن}}$
- فإن: أ = ب ، ن عدد فردى
- فإن: أ = ± ب ، ن عدد زوجى
- إذا كان : أ ≠ ب فإن: ن = ٠

مثـــــ١ـــــال: أوجد مجموعة حل المعادلة: $(٣)^{\text{٢س} - ٥} = ٢٤٣$ فى ع

الحــــــــل

$(٧)^{\text{٢س} - ٥} = ٢٤٣ = (٣)^{٥}$ ∴ ٢س − ٥ = ٥ ∴ س = ٥

مثـــــ٢ـــــال: اوجد مجموعة حل المعادلة $(١ + \text{س})^{٤} = ١٠٠٠٠$ فى ع

الحــــــــل

$(١ + \text{س})^{٤} = (± ١٠)^{٤}$ ∴ ١ + س = ± ١٠

إما ١ + س = ١٠ ∴ س = ٩ أو ١ + س = − ١٠

∴ س = − ١١ ∴ م.ح = {٩ ، −١١}

مثـ٣ـال إذا كان د(س) = $(٢)^{\text{س}}$ وكانت د(٢س + ١) − د(٢س − ١) = ١٢ فأوجد قيمة س

الحــــــــل

$(٢)^{\text{٢س} + ١} - (٢)^{\text{٢س} - ١} = ١٢$ ∴ $٢^{\text{٢س} - ١}(٢^{٢} - ١) = ١٢$

∴ $٢^{\text{٢س} - ١} × ٣ = ١٢$ ∴ $٢^{\text{٢س} - ١} = ٤ = (٢)^{٢}$

∴ ٢س − ١ = ٢ ∴ ٢س = ٣ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

مثـ٤ـال حل المعادلة $٩^{\text{س}} + ٣^{\text{٢س} - ١} = ١٢$

الحــــــــل

$٣^{\text{٢س}} + ٣^{\text{٢س} - ١} = ١٢$ ∴ $٣^{\text{٢س} - ١}(٣ + ١) = ١٢$

∴ $٣^{\text{٢س} - ١} × ٤ = ١٢$ ⇐ $٣^{\text{٢س} - ١} = ٣$

∴ ٢س − ١ = ١ ⇐ ٢س = ٢ ∴ س = ١

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

مثـ٥ـال حل المعادلة $٤^{س} - ٩ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$

الحـــــــل

$٤^{س} - ٩ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$ ∴ $(٢^{٢})^{س} - ٩ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$

∴ $(٢^{س} - ٨)(٢^{س} - ١) = ٠$

إما $٢^{س} - ٨ = ٠$ ومنها $٢^{س} = ٢^{٣}$ ∴ س = ٣

أ، $٢^{س} - ١ = ٠$ ومنها $٢^{س} = ١$ ∴ س = ٠

مثـ٦ـال حل المعادلة $\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٤ \sqrt[٣]{س} = -٣$

الحـــــــل

$س^{\frac{٢}{٣}} - ٤ س^{\frac{١}{٣}} + ٣ = ٠$ ∴ $(س^{\frac{١}{٣}} - ١)(س^{\frac{١}{٣}} - ٣) = ٠$

إما $س^{\frac{١}{٣}} = ١$ ∴ س = ١

أ، $س^{\frac{١}{٣}} = ٣$ ∴ $(س^{\frac{١}{٣}})^{٣} = (٣)^{٣}$ ∴ س = ٢٧

مثـ٧ـال حل المعادلة $(٥)^{س} + (٥)^{٣-س} = ٣٠$

الحـــــــل

$(٥)^{س} + (٥)^{٣-س} = ٣٠$ بالضرب × $(٥)^{س}$

∴ $(٥)^{٢س} + (٥)^{٣} = ٣٠ \times (٥)^{س}$

∴ $(٥)^{٢س} - ٣٠ \times (٥)^{س} + ١٢٥ = ٠$

∴ $[(٥)^{س} + ٥][(٥)^{س} - ٢٥] = ٠$

إما $(٥)^{س} - ٥ = ٠$ ومنها $(٥)^{س} = ٥$ ∴ س = ١

أ، $(٥)^{س} - ٢٥ = ٠$ ومنها $(٥)^{س} = ٢٥ = (٥)^{٢}$ ∴ س = ٢

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

مثـ٨ـال حل المعادلة $(٣)^{٢س - ١} - ١٠ \times (٣)^{س} + ٢٧ = ٠$

الحـــــــــــــل

$(٣)^{٢س - ١} - ١٠ \times (٣)^{س} + ٢٧ = ٠$ بالضرب $\times ٣$

$\therefore (٣)^{٢س} - ٣٠ \times (٣)^{س} + ٨١ = ٠ \Leftarrow [(٣)^{س} - ٢٧] [(٣)^{س} - ٣]$

إما $(٣)^{س} - ٢٧ = ٠$ ومنها $(٣)^{س} = ٢٧ = (٣)^{٣}$ $\therefore$ س $= ٣$

أ، $(٣)^{س} - ٣ = ٠$ ومنها $(٣)^{س} = ٣$ $\therefore$ س $= ١$

مثـ٩ـال حل المعادلة $(٥)^{س + ١} + (٥)^{-س} = ٦$

الحـــــــــــــل

$٥ \times (٥)^{س} + \frac{١}{(٥)^{س}} = ٦$ بالضرب $\times (٥)^{س}$

$\therefore ٥ \times (٥)^{٢س} + ١ = ٦(٥)^{س}$

$\therefore ٥ \times (٥)^{٢س} - ٦ \times (٥)^{س} + ١ = ٠ \Leftarrow [٥ \times (٥)^{س} - ١] [(٥)^{س} - ١]$

إما $٥ \times (٥)^{س} - ١ = ٠$ ومنها $(٥)^{س} = \frac{١}{٥}$ $\therefore$ س $= -١$

أ، $(٥)^{س} - ١ = ٠$ ومنها $(٥)^{س} = ١$ $\therefore$ س $= ٠$

مثـ١٠ـال إذا كانت $د_١(س) = (٣)^{س}$ ، $د_٢(س) = (٩)^{س}$ فأوجد قيمة س التى تحقق المعادلة $د_١(٢س - ١) + د_٢(س + ١) = ٧٥٦$

الحـــــــــــــل

$(٣)^{٢س - ١} + (٩)^{س + ١} = ٧٥٦$

$\therefore (٣)^{٢س - ١} + (٣)^{٢س + ٢} = ٧٥٦ \Leftarrow (٣)^{٢س - ١} [١ + (٣)^{٣}] ٧٥٦$

$\therefore (٣)^{٢س - ١} \times [١ + ٢٧] = ٧٥٦$

$\therefore (٣)^{٢س - ١} = ٧٥٦ \div ٢٨ = ٢٧ = (٣)^{٣}$

$\therefore ٢$ س $- ١ = ٣ \Leftarrow ٢$ س $= ٤$ $\therefore$ س $= ٢$

تمـــــارين

١ ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها وبين: أى منها تكون متزايدة وأى منها متناقصة

أ د(س) = $٢^{س}$ ب د(س) = $٣^{س}$ ج د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$

٢ أوجد جملة مبلغ ٨٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك يُعطى فائدة سنويّة مركبة قدرُها ٥٪ لمدة ٧ سنوات.

٣ أكمل ما يأتى:

أ إذا كان $٢^{|س|} = ٣٢$ فإن س = ...

ب إذا قطع منحنى الدالة $د_١$ حيث $د_١(س) = ٣^{س}$ منحنى الدالة $د_٢$ حيث $د_٢(س) = ٤-س$ في نقطة (ك ، ٣) فإن مجموعة حل المعادلة $٣^{س} = ٤-س$ تساوي ....

٤ إذا كانت د(س) = $٢^{س}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات:

أ د(س) = ٨ ب د(س+١) = $\frac{١}{٣٢}$

٥ إذا كانت د(س) = $٧^{س-٢}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلاتِ:

أ د(س) = ٣٤٣ ب د(٢س) = $\frac{١}{٤٩}$

٦ إذا كانت د(س) = $٣^{س+١}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلاتِ:

أ د(س) = ٢٧ ب د(س-١) = $\frac{١}{٩}$

٧ تتناقص أعداد الكائنات البحرية تبعًا لدالة التضاؤل الأسى ص = $٨١٩٢(\frac{١}{٢})^{ن-١}$ حيث ن عدد الاسابيع بدءًا من الآن. أوجد:

أ عدد هذه الكائنات بعد مرور ٤ أسابيع من الآن.

ب بعد كم أسبوع من الآن يصبح عدد هذه الكائنات ٢٥٦.

٨ أكمل مايأتى:

أ الدالة د : د(س) = $٢^{س}$ تقطع محور الصادات فى النقطة ....

ب الدالة د : د(س) = $٢^{١-س}$ تقطع محور الصادات فى النقطة ....

ج إذا مر منحنى الدالة د : د(س) = $أ^{س}$ بالنقطة (١، ٣) فإن أ = ...

اللوغاريتمات

ص = لو$_{ا}$ س ⟺ س = ا^{ص} حيث ا ∈ ع$^{+}$ − {١} ، س ∈ ع$^{+}$ ، ص ∈ ع

ملاحظة : لا معنى عن لوغاريتم عدد غير موجب ، بمعنى لو$_{٢}$ −٣ ، لو$_{٣}$ (٠) ليس لها معنى

الأساس ا يجب أن يكون موجب يختلف عن الواحد لو$_{-٢}$ ٨ ، لو$_{٠}$ ٥ ليس لها معنى

اللوغاريتم المعتاد هو لوغاريتم أساسه ١٠ وتكتب لو$_{١٠}$ ٨ = لو ٨

الدالة اللوغاريتمية

إذا كان: ا ∈ ع$^{+}$ − {١} فإن الدالة د: ع$^{+}$ ⟵ ع : د(س) = لو$_{ا}$ س

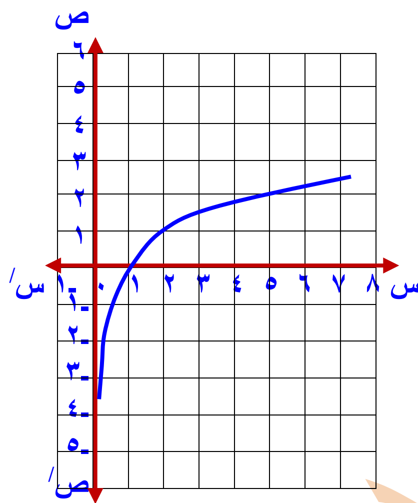
التمثيل البيانى للدالة اللوغاريبمية

هى د: ح$_{+}$ ⟵ ح ؛ د(س) = لو$_{ا}$ س: ا ∈ ح$_{+}$ − { ١ }

إذا كانت د(س) = لو$_{ا}$ س فإن الخط البيانى للدالة د(س)

يمثل بالأزواج المرتبة (س ، لو$_{ا}$ س)

(١) إذا كانت : - ا > ١

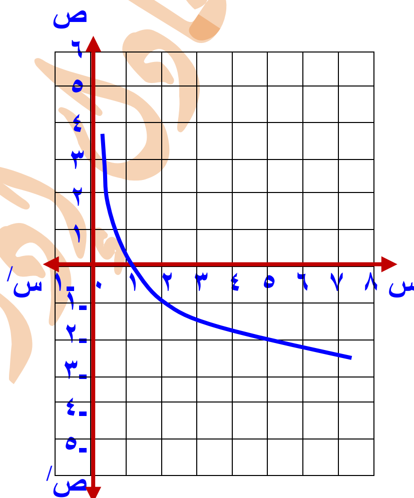


المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٠)

المجال = ح$_{+}$ أى] ٠ ، ∞ [

المدى = ح الدالة تزايدية على ح$_{+}$

(٢) إذا كانت ٠ < ا < ١



المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٠)

المجال = ح$_{+}$ أى] ٠ ، ∞ [

المدى = ح

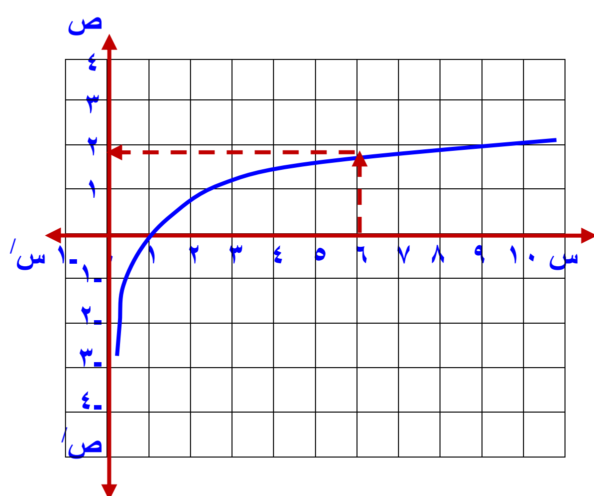
الدالة تناقصية على ح$_{+}$

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

مثــــ١ـــال : إرسم الشكل البيانى للدالة : د : د (س) = لـو$_{٣}$ س متخذاً س ∋ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩]

ومن الرسم أوجد : قيمة تقريبية للعدد لـو$_{٣}$ ٦، عددين صحيحين ينحصر بينهما لـو$_{٣}$ ٣,٥

الحـــــــــــل



نكون الجدول :

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
د (س)	ــ ٢	١ـ	٠	١	٢

ومن الرسم :

لإيجاد قيمة تقريبية للعدد لو$_{٣}$ ٦ :

نرسم عند س = ٦ مستقيماً يوازى محور الصادات

ليقابل المنحنى فى نقطة فتكون قيمة ص

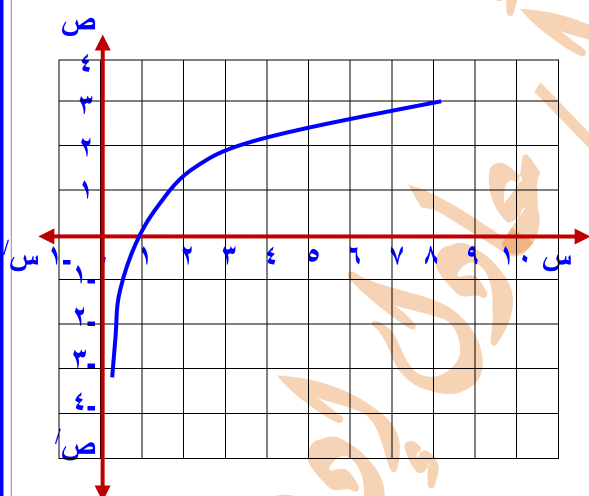
المناظرة على محور الصادات = ١,٦ ∴ لـو$_{٣}$ ٦ ≃ ١,٦

، بالمثل : نجد أن : لـو$_{٣}$ ٣,٥ ينحصر بين ١ ، ٢

مثــــ٢ـــال: إذا كان منحنى الدالة د: د(س) = لـو$_{م}$ س يمر بالنقطة (٤، ٢) أوجد قيمة م

ثم أرسم منحنى الدالة متخذ س ∋ [$\frac{١}{٨}$ ، ٨] ومن الرسم أستنتج المدى والأطراد

الحـــــــــــل



∵ د(س) = لـو$_{م}$ س يمر بالنقطة (٤، ٢)

∴ لـو$_{م}$ ٤ = ٢ ⟸ (م)^{٢} = ٤

∴ م = ٢ والسالب مرفوض

∴ د(س) = لـو$_{٢}$ س نكون الجدول :

س	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨
د (س)	ــ ٣	٢ـ	١ـ	٠	١	٢	٣

ومن الرسم : المدى ع ، الدالة تزايدية على مجالها

مثـــــ٣ـــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) $لو_{٢} س = ٢$ (ب) $لو_{٣} س = -٢$ (جـ) $لو_{٢} ٣٢ = س$

الحـــــــــل

(أ) $س = ٢^{٢} = ٤$ ∴ م.ح = { ٤ }

(ب) $س = ٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$ ∴ م.ح = { $\frac{١}{٩}$ }

(جـ) $٢^{س} = ٣٢ = ٢^{٥}$ ∴ س = ٥ ∴ م.ح = { ٥ }

مثـــــ٤ـــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) $لو_{س} ١٢٥ = ٣$ (ب) $لو_{س} ٨س = ٤$ (جـ) $لو_{٢} \frac{١}{٨} = س$

الحـــــــــل

(أ) $س^{٣} = ١٢٥$ ∴ $٥^{٣} = س^{٣}$ ∴ س = ٥ ∴ م.ح = { ٥ }

(ب) $٨ س = س^{٤}$ ، $٨ = س^{٣}$

$٢^{٣} = س^{٣}$ ∴ س = ٢ ∴ م.ح = { ٢ }

(جـ) $(٢)^{س} = \frac{١}{٨}$ ، $(٢)^{س} = (٢)^{-٣}$ ∴ س = -٣ ∴ م.ح = { -٣ }

مثـــــ٥ـــال : عين مجال الدزال المعرفة بالقواعد الآتية

(أ) $د_{١} = لو_{٣} (٢س + ١)$ (ب) $د_{٢} = لو_{س-٢} س$ (جـ) $د_{٣} = لو_{٢-س} س$

الحـــــــــل

(أ) الدالة معرفة عندما ٢س + ١ > ٠ ⟸ ٢س > $-\frac{١}{٢}$ ∴ مجال $د_{١}$ =] $-\frac{١}{٢}$ ، ∞ [

(ب) س > ٠ ، س ـ ٢ > ٠ ، س ـ ٢ ≠ ١ ⟸ س > ٠ ، س > ٢ ، س ≠ ٣

∴ مجال $د_{٢}$ =] ٢ ، ∞ [ـ {٣}

(جـ) س > ٠ ، ٢ ـ س > ٠ ، ٢ ـ س ≠ ١ ⟸ س > ٠ ، س < ٢ ، س ≠ ١

∴ مجال $د_{٢}$ =] ٠ ، ٢ [ـ {١}

مثـــــ٦ـــال : أوجد قيمة س إذا كان

(أ) لو$_{٢}$ (س^{٢} − ٢س) = ٣ (ب) لو$_{٢\sqrt{٣}}$ (س^{٢} − س) = ٢

الحـــــــــــل

(أ) س^{٢} − ٢ س = ٢^{٣} س^{٢} − ٢ س = ٨

س^{٢} − ٢ س − ٨ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

س = ٤ أ، س = -٢ ∴ م.ح = { ٤ ، -٢ }

(ب) س^{٢} − س = (٢$\sqrt{٣}$)^{٢} س^{٢} − س = ١٢

س^{٢} − س − ١٢ (س − ٤) (س + ٣) = ٠

س = ٤ س = -٣ ∴ م.ح = { ٤ ، -٣ }

مثـــــ٧ـــال : أوجد فى ح مجموعة حل المعادلات الآتية

(أ) (لو$_{٢}$س)^{٢} − ٥ لو$_{٢}$ س +٦ = ٠ (ب) (لو$_{٢}$س)^{٢} − ٥ لو$_{٢}$ س = ١٢

الحـــــــــــل

(أ) (لو$_{٢}$س - ٢)(لو$_{٢}$ س -٣) = ٠ ⇐ لو$_{٢}$س = ٢ أ، لو$_{٢}$ س = ٣

س = (٢)^{٢} = ٤ أ، س = (٢)^{٣} = ٨ ∴ م.ح = { ٤ ، ٨ }

(ب) (لو$_{٢}$س - ٤)(لو$_{٢}$ س +٣) = ٠ ⇐ لو$_{٢}$س = ٤ أ، لو$_{٢}$ س = -٣

س = (٢)^{٤} = ١٦ أ، س = (٢)$^{-٣}$ = $\frac{١}{٨}$ ∴ م.ح = { ١٦ ، $\frac{١}{٨}$ }

مثـــــ٨ـــال : أوجد فى ح مجموعة حل المعادلات الآتية

(أ) لو$_{٣}$ | س +٥ | = ٢ (ب) (لو$_{٢}$س)^{٢} - لو$_{٢}$ س = ٠

الحـــــــــــل

(أ) | س + ٥ | = ٣^{٢} ⇐ س + ٥ = ٩ أ، س + ٥ = -٩

س = ٩ − ٥ أ، س = -٩ − ٥

س = ٤ أ، س = -١٤ ∴ م.ح = { ٤ ، -١٤ }

(ب) لو$_{٢}$ س (لو$_{٢}$ س -١) = ٠ ⇐ لو$_{٢}$ س = ٠ أ، لو$_{٢}$ س -١ = ٠

س = (١٠)^{٠} = ١ أ، س = (١٠)^{١} = ١٠ ∴ م.ح = { ١ ، ١٠ }

منتدى توجيه الرياضيات / أ عادل إدوار

تمـــــارين

(١) أكمل ما يأتى:

(أ) الصورة الأسية المكافئة للصورة $لو_{٣} ٢٧ = ٣$ هى ....

(ب) الصورة اللوغاريتمية المكافئة للصورة $٣^{صفر} = ١$ هى ....

(ج) لو ٠,٠٠١ = ...
(د) $لو_{٢} ١$ = ...

(هـ) إذا كان $لو_{س} ٤ = ٢$ فإن س = ...
(و) إذا كان $لو_{٢} ١٢٨ = س + ١$ فإن س = ...

(ز) مجال الدالة د : د(س) = $لو_{٢}$ س هو ....
(ح) الدالة د حيث د(س) = $لو_{أ}$ س متناقصة لكل أ ∈ ....

(ط) منحنى الدالة د حيث د(س) = $لو_{٢}$ س يمر بالنقطة (٨، ....)

(ى) إذا كان لو٣ = س ، لو ٥ =ص فإن لو ١٥ = ... (بدلالة س،ص)

(٢) أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:-

(أ) $لو_{٣} (س - ١) = ٢$
(ب) $لو_{٥} (س + ٢) = ٣$
(ج) $لو_{س} ٩ = \frac{٢}{٣}$

(د) $لو_{س+١} ٨ = \frac{٣}{٤}$
(هـ) $لو_{س} (س + ٢) = ٢$
(و) $لو_{س} ٩ = ٢$

(٣) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة

(أ) $لو_{٥} ١$
(ب) $لو_{٧} ٧$
(ج) $لو_{٣} ٩$
(د) $لو_{٦} ٣ + لو_{٦} ٢$

(٤) مثل بيانيًّا الدالة د فى كل مما يأتى الآتية ومن الرسم أوجد مداها وابحث اطرادها:

(أ) د(س) = $لو_{٢}$ س
(ب) د(س) = $لو_{٣}$ س
(ج) د(س) = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س
(د) د(س) = $لو_{\frac{١}{٣}}$ (س + ١)

(٥) استخدم الحاسبة فى إيجاد قيمة كلٍّ من:-

(أ) لو ١٥
(ب) $لو_{٢} ٢٧$
(ج) ٤لو٧ - ٥لو١٣

(٦) إذا كانت مصاريف الاشتراك السنوى بالجنيه لأسرة فى أحد النوادى الاجتماعية تتبع العلاقة د(س) = ٥٠٠ + ١٠٠لو (ن س) حيث ن عدد سنوات الاشتراك س عدد الأفراد. أوجد قيمة اشتراك أسرة مكونة من ٥ أفراد للسنة الرابعة فى هذا النادى.

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

قوانيين اللوغاريتمات

[١] لو س ص = لو س + لو ص

فمثلا : لو ٦ = لو ٢ × ٣ = لو ٢ + لو ٣

والعكس : لو ٣ + لو ٤ = لو ٣×٤ = لو ١٢

لو س + لو (س+٢) = لو س (س+٢)

[٢] لو $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = لو س – لو ص

فمثلا : لو $\frac{٣}{٤}$ = لو ٣ – لو ٤

والعكس : لو ٤ – لو ٥ = لو $\frac{٤}{٥}$

لو س – لو (س +١) = لو $\frac{\text{س}}{\text{س} + ١}$

تذكر أن :

* لو (س + ص) ≠ لو س + لو ص
* لو (س – ص) ≠ لو س – لو ص
* لو (س × ص) ≠ لو س × لو ص
* لو (س ÷ ص) ≠ لو س ÷ لو ص

[٣] لو س$^{\text{ن}}$ = ن لو س

فمثلا : لو س^{٥} = ٥ لو س

والعكس : ٣ لو س = لو س^{٣}

[٤] لو$_{\text{ا}}$ ا = ١ فمثلاً : لو$_{٥}$ ٥ = ١

[٥] لو$_{\text{ا}}$ ١ = صفر

[٦] إذا: س ∈ ح$^{+}$ ، ص ، ا ∈ ح$^{+}$ – {١} فإن : لو$_{\text{ص}}$ س = $\frac{\text{لو}_{\text{ا}}\ \text{س}}{\text{لو}_{\text{ا}}\ \text{ص}}$

فمثلاً: لو$_{٣}$ ٨ = $\frac{\text{لو}\ ٨}{\text{لو}\ ٣}$ أ، لو$_{٩}$ ٧ = $\frac{\text{لو}_{ه}\ ٧}{\text{لو}_{ه}\ ٩}$

[٧] إذا: س ∈ ح$^{+}$ – {١} ، ص ∈ ح$^{+}$ – {١} فإن : لو$_{\text{ص}}$ س = $\frac{١}{\text{لو}_{\text{س}}\ \text{ص}}$

فمثلاً: لو$_{٣}$ ٨ = $\frac{١}{\text{لو}_{٨}\ ٣}$ ⟸ لو$_{٩}$ ٧ × لو$_{٧}$ ٩ = ١

ملاحظة : إذا: س ∈ ح$^{+}$ ، م عدداً زوجياً لا يساوى الصفر ، ا ∈ ح$^{+}$ – {١}

فإن : لو$_{\text{ا}}$ (س)$^{\text{م}}$ = م لو$_{\text{ا}}$ |س| فمثلاً: لو$_{٣}$ (س)^{٤} = ٤ لو$_{٣}$ |س|

مثــــ١ـــال : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة

أ) $لو_{٢}\ ١٥ + لو_{٢}\ ١٤ - لو_{٢}\ ١٠٥$ ب) $لو\ ٤٨ + لو\ ١٢٥ - لو\ ٦$

الحــــــــل

أ) $لو_{٢} \frac{١٥ \times ١٤}{١٠٥} = لو_{٢}\ ٢ = ١$

ب) $لو \frac{٤٨ \times ١٢٥}{٦} = لو\ ١٠٠٠ = لو\ (١٠)^{٣} = ٣\ لو\ ١٠ = ٣ \times ١ = ٣$

مثــــ٢ـــال : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة

أ) $٣لو_{٣}\ ٥ + لو_{٣} \frac{٢٤٣}{١٢٥}$ ب) $١ + لو\ ٣ - لو\ ٢ - لو\ ١٥$

الحــــــــل

أ) $٣لو_{٣}\ ٥ + لو_{٣}\ ٢٤٣ - لو_{٣}\ ١٢٥ = لو_{٣}\ (٥)^{٣} + لو_{٣}\ (٣)^{٥} - لو_{٣}\ (٥)^{٣} = ٥لو_{٣}\ ٣ = ٥$

ب) $لو\ ١٠ + لو\ ٣ - لو\ ٢ - لو\ ١٥ = لو \frac{١٠ \times ٣}{٢ \times ١٥} = لو\ ١ = صفر$

مثــــ٣ـــال : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة

$لو_{٢} \frac{٣}{٢٥} + ٥\ لو_{٢}\ ٥ - لو_{٢} \frac{١٢٥}{١٢} + لو_{٢}\ ٢٧ - لو_{٢}\ ٢٤٣$

الحــــــــل

$لو_{٢} \frac{٣ \times (٥)^{٥} \times ١٢ \times ٢٧}{٢٥ \times ١٢٥ \times ٢٤٣} = لو_{٢}\ ٤ = لو_{٢}\ (٢)^{٢} = ٢\ لو_{٢}\ ٢ = ٢$

مثــــ٤ـــال : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة

$لو\ ٠,٠٠٩ - لو \frac{٢٧}{١٦} + لو\ ١٥\frac{٥}{٨} - لو \frac{١}{١٢}$

الحــــــــل

$لو \frac{٩ \times ١٦ \times ١٢٥ \times ١٢}{١٠٠٠ \times ٢٧ \times ٨ \times ١} = لو\ ١ = صفر$

منتدى توجيه الرياضيات / عادل إدوار

مثـــــال ٥ : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) لو س + لو ٣ = لو ١٥   (ب) لو س − لو ٢ = لو ٣

الحـــــــــل

(أ) لو س × ٣ = لو ١٥ ⇐ لو ٣ س = لو ١٥

٣س = ١٥ ⇐ س = ٥ ∴ م.ح = { ٥ }

(ب) لو $\frac{\text{س}}{2}$ = لو ٣ ⇐ $\frac{\text{س}}{2}$ = ٣

س = ٣ × ٢ = ٦ ∴ م.ح = { ٦ }

مثـــــال ٦ : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) لو$_{2}$ س + لو$_{2}$ (س − ٢) = ٣   (ب) لو$_{4}$ س + لو$_{4}$ (س + ١٢) = ٣

الحـــــــــل

(أ) لو$_{2}$ س (س − ٢) = ٣ ⇐ س^{2} − ٢ س = (٢)^{3}

س^{2} − ٢ س = ٨ ⇐ س^{2} − ٢ س − ٨ = (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٤   س = -٢ (مرفوض) ∴ م.ح = { ٤ }

(ب) لو$_{4}$ س(س + ١٢) = ٣ ⇐ لو$_{4}$ (س^{2} + ١٢س) = ٣

س^{2} + ١٢ س = (٤)^{3}

س^{2} + ١٢ س − ٦٤ = (س − ٤)(س + ١٦) = ٠

∴ س = ٤   س = -١٦ (مرفوض) ∴ م.ح = { ٤ }

مثـــــال ٧ : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة :

لو$_{2}$ ٥ × لو$_{5}$ ٧ × لو$_{7}$ ٩ × لو$_{3}$ ٢

الحـــــــــل

المقدار = $\frac{\text{لو ٥}}{\text{لو ٢}}$ × $\frac{\text{لو ٧}}{\text{لو ٥}}$ × $\frac{\text{لو ٩}}{\text{لو ٧}}$ × $\frac{\text{لو ٢}}{\text{لو ٣}}$ = $\frac{\text{لو ٩}}{\text{لو ٣}}$ = $\frac{\text{٢لو ٣}}{\text{لو ٣}}$ = ٢

منتدى توجيه الرياضيات أ/عادل إدوار

مثـــ٨ـــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) لو س^{٢} = لو ٤ + لو ٩   (ب) $\frac{\text{لو ٤٩} - (\text{لو ٧})^{٢}}{\text{لو ٠,٠٧}}$ = لو س

الحـــــــل

(أ) لو س^{٢} = لو ٤×٩ = لو ٣٦ = لو (٦)^{٢} ⇐ ٢ لو |س| = ٢ لو ٦

∴ |س| = ٦   ∴ س = ±٦ تحقق   ∴ م.ح = { ٦ ، −٦ }

(ب) لو س = $\frac{\text{لو} (٧)^{٢} - (\text{لو٧})^{٢}}{\text{لو ٧ − لو ١٠٠}}$ = $\frac{\text{٢لو} (٧) - (\text{لو٧})^{٢}}{\text{لو ٧ − لو} (١٠)^{٢}}$ = $\frac{\text{لو} (٧)[٢ - \text{لو٧}]}{\text{لو ٧ − ٢}}$

= − لو ٧ = لو (٧)$^{-١}$ = لو $\frac{١}{٧}$

مثـــ٩ـــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) (لو س)^{٣} = لو س^{٤} (ب) (٢)$^{(\text{لو س})^{٢}}$ × ٦٤ = (٣٢)$^{(\text{لو س})}$

الحـــــــل

(أ) (لو س)^{٣} = ٤ لو س   ⇐ (لو س)^{٣} − ٤ لو س = ٠

لو س [(لو س)^{٢} − ٤] = ٠   ⇐ لو س = ٠   أ، (لوس)^{٢} = ٤

∴ س = ١٠$^{\text{صفر}}$ أ، لو س = |٢|

∴س = ١   أ، لوس = ٢   أ، لوس = −٢

س = (١٠)^{٢} = ١٠٠   س = ١٠ $^{-٢}$ = ٠,٠١

∴ م.ح = { ١ ، ١٠٠ ، ٠,٠١ }

(ب) (٢)$^{(\text{لو س})^{٢}}$ × (٢)^{٦} = (٢^{٥})$^{(\text{لو س})}$ ⇐ (٢)$^{(\text{لوس})^{٢} + ٦}$ = (٢)$^{٥(\text{لو س})}$

∴ (لو س)^{٢} + ٦ = ٥ لو س   ⇐ (لو س)^{٢} − ٥ لو س + ٦ = ٠

نحلل: (لوس − ٢) (لو س − ٣) = ٠

∴ لو س = ٢   أ، لو س = ٣

∴ س = ١٠^{٢} = ١٠٠   أ، س = ١٠^{٣} س = ١٠٠٠

∴ م.ح = { ١٠٠ ، ١٠٠٠ }

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

مثـــــ١٠ــال : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة :

(أ) $\frac{١}{لو_{٢} ١٢} + \frac{١}{لو_{٨} ١٢} + \frac{١}{لو_{٩} ١٢}$ (ب) $لو_{أ ب ح}$ أ + $لو_{أ ب ح}$ ب + $لو_{أ ب ح}$ ح

الحــــــــل

(أ) $\frac{١}{لو_{٢} ١٢} + \frac{١}{لو_{٨} ١٢} + \frac{١}{لو_{٩} ١٢}$ = $لو_{١٢}$ ٢ + $لو_{١٢}$ ٨ + $لو_{١٢}$ ٩

= $لو_{١٢}$ (٢ × ٨ × ٩) = $لو_{١٢}$ ١٤٤ = $لو_{١٢}$ $(١٢)^{٢}$ = ٢ $لو_{١٢}$ ١٢ = ٢

(ب) $لو_{أ ب ح}$ أ + $لو_{أ ب ح}$ ب + $لو_{أ ب ح}$ ح = $لو_{أ ب ح}$ أ ب ح = ١

استخدام الآلة الحاسبة:

اللوغاريتمات المعتادة

هى اللوغاريتمات التى أساسها (١٠) ولا يكتب أسفل رمز اللوغاريتم

كيفية أيجاد لوغاريتم عدد استخدام مفتاح اللوغاريتم المعتاد هو [log]

(١) لإيجاد: لو ٨,٤ نتبع الخطوات

[log] [8] [.] [5] [=] يظهر على الشاشة العدد 0,9242792861

فيكون : لو ٨,٤ = ٠,٩٢٤٢

(٢) لإيجاد قيمة س إذا كان لو س = ٠,٤٥٧٢ نتبع الخطوات

[shift] [log] [0] [.] [4] [5] [7] [2] [=] يظهر على الشاشة 2,86597276

فيكون : س ≃ ٢,٨٦٥٥

اللوغاريتم لأى أساس

(١) لإيجاد: $لو_{٣}$ ٢٤ نتبع الخطوات

[log□] [3] [ ] [2] [4] [=] يظهر على الشاشة العدد 2,892789261

فيكون : لو ٢٤ ≃ ٢,٨٩٢٨

مثــ١ــال أوجد قيمة س التى تحقق أن

(أ) س = ٢ لو ٧ – ٣ لو ٢   (ب) س = $\frac{\text{٣ لو ٥ – ٢ لو ٣}}{\text{٥ لو ٣ – لو ٧}}$

الحــــــــــل

2 Log 7 – 3 Log 2 = 0.78

∴ س = ٠,٧٨

(3 Log 5 – 2 Log 3) ÷ (5 Log 3 – Log 7) = 0.74

∴ س = ٠,٧٤

مثــ٢ــال أوجد قيمة س التى تحقق أن

(أ) لو س = ١,٥   (ب) س = $(٢,٣)^{١٠}$ (جـ) $(٤)^{س}$ = ٥٧

الحــــــــــل

(أ) ∴ س = ٣١,٦   shift Log 1,5 = 31.6

(ب) بأخذ لوغاريتم الطرفين ⟸ لو س = لو $(٢,٣)^{١٠}$ = ١٠ لو ٢,٣

∴ س ≃ ٤,١٤   10 × log 2,3 = shift log = 4,142651121

(جـ) بأخذ لوغاريتم الطرفين ⟸ س لو ٤ = ٥٧ ∴ س = لو ٥٧ ÷ لو ٤

∴ س ≃ ٢,٩١٦   Log 57 ÷ log 4 = 2,916445007

مثــ٣ــال : إذا كان حجم الكرة ع يعطى من العلاقة ع = $\frac{٤}{٣}$ π $نق^{٣}$ أوجد باستخدام الحاسبة(اولا) قيمة ع عندما نق = ١٠سم (ثانيا) قيمة نق عندما ع = ١٥٠

الحــــــــــل

(أولا) عندما : نق = ١٠سم   ع = $\frac{٤}{٣}$ π $(١٠)^{٣}$ = ٤١٨٨,٧٩ بالالة

4 ÷3 × sh exp × 10 x^y 3 = 4188.79

(ثانيا) عندما: ع = ١٥٠   ١٥٠ = $\frac{٤}{٣}$ π $نق^{٣}$

$نق^{٣}$ = $\frac{١٥٠ \times ٣}{٤\pi}$ = ٣٥,٨   بأخذ اللوغاريتم ٣ لو نق = لو ٣٥,٨

∴نق ≃ ٣,٣ سم   Log 35,8 ÷ 3 = shift log = 3,2958

مثـــ٤ـــال : أوجد مساحة سطح مكعب حجمه ١٢٠٠سم^{3}

الحـــــــل

حجم المكعب = ١٢٠٠ ⇐ ل^{3} = ١٢٠٠ بأخذ لوغاريتم الطرفين

٣ لو ل = لو ١٢٠٠ ⇐ ل = (لو ١٢٠٠) ÷ ٣

∴ ل ≃ ١٠,٦٢٧ سم   Log 1200 ÷ 3 = shift log = 10,62658569

حل آخر حجم المكعب = ١٢٠٠ ⇐ ل^{3} = ١٢٠٠

∴ ل = $\sqrt[3]{1200}$ = ١٠,٦٢٧

مساحة المكعب = ٦ ل^{2} = ٦ (١٠,٦٢٧)^{2} = ٦٧٧,٥٤ سم^{2}

مثـــ٥ـــال أوجد قيمة س التى تحقق أن

(أ) (٥)$^{س+٢}$ = ١٢   (ب) (٥)$^{٢س-٣}$ = (٣)$^{س+٤}$

الحـــــــل

(أ) بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو ٥$^{س+٢}$ = لو ١٢ ⇐ (س +٢) لو ٥ = لو ١٢

س لو ٥ + ٢ لو ٥ = لو ١٢ ⇐ س لو ٥ = لو ١٢ – ٢ لو ٥

س = $\frac{\text{لو ١٢ – ٢ لو ٥}}{\text{لو ٥}}$ = –٠,٤٥

(ب) بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو (٥)$^{٢س-٣}$ = لو (٣)$^{س+٤}$ ⇐ (٢س – ٣) لو ٥ = (س + ٤) لو ٣

٢س لو ٥ – ٣ لو ٥ = س لو ٣ + ٤ لو ٣ ⇐ ٢س لو ٥ – س لو ٣ = ٤ لو ٣ + ٣ لو ٥

∴ س (٢لو ٥ – لو ٣) = ٤ لو ٣ + ٣ لو ٥   ∴ س = $\frac{\text{٤ لو ٣ + ٣ لو ٥}}{\text{٢لو ٥ – لو ٣}}$ = ٤,٣

منتدى توجيه الرياضيات / أ/ عادل إدوار

مثـــ٦ــال أوجد قيمة س التى تحقق أن : (٥)$^{٢س+١}$ = ٧ × (٣)$^{س+٢}$

الحـــــــل

بأخذ لوغاريتم الطرفين ∴ لو ٥$^{٢س+١}$ = لو(٧ × ٣$^{س+٢}$)

لو ٥$^{٢س+١}$ = لو ٧ + لو ٣$^{س+٢}$ ⇐ (٢س+١) لو ٥ = لو ٧ + (س+٢) لو ٣

٢س لو٥ + لو٥ = لو٧ + س لو٣ + ٢لو٣

٢س لو٥ ـ س لو٣ = لو٧ + ٢لو٣ ـ لو٥

س (٢لو٥ ـ لو ٣) = لو٧ + ٢ لو ٣ ـ لو٥

∴ س = (لو ٧ + ٢ لو٣ ـ لو٥) / (٢لو٥ ـ لو٣) = ١,١٩

مثـــ٧ــال أوجد قيمة س التى تحقق أن : (٨)$^{٢س+١}$ × (٩)$^{س+٢}$ = ٢٧

الحـــــــل

بأخذ لوغاريتم الطرفين ∴ لو(٨$^{٢س+١}$ × ٩$^{س+٢}$)= لو ٢٧

لو ٨$^{٢س+١}$ + لو ٩$^{س+٢}$ = لو ٢٧

(٢س+١) لو ٨ +(س+٢) لو ٩ = لو٢٧

٢س لو٨ + لو٨ +س لو٩ +٢لو ٩ = لو ٢٧

٢س لو ٨ + س لو ٩ = لو٢٧ ـ ٢لو٩ ـ لو٨

س(٢لو ٨ + لو ٩)= لو٢٧ ـ ٢لو ٩ ـ لو٨

∴ س = (لو٢٧ ـ ٢ لو ٩ ـ لو٨) / (٢ لو٨ + لو٩) = -٠,٥

مثـــ٨ــال أوجد قيمة س التى تحقق أن : ٢^{٢س} ـ ٥ × ٢^{س} + ٦ = ٠

الحـــــــل

نحلل : (٢^{س} ـ ٢) (٢^{س} ـ ٣) = ٠

٢^{س} = ٢ أ، ٢^{س} = ٣ ⇐ س = ١ أ، لو ٢^{س} = لو٣

∴ س = ١ أ، س = لو٣ / لو ٢ = ١,٦ ∴ س = { ١ ، ١,٦ }

منتدى توجيه الرياضيات / أ/ عادل إدوارد

مثـــ٩ـــال أوجد قيمة س التى تحقق أن : ٢ ^{٢س} – ٨ × ٢ ^{س} + ١٥ = ٠

الحـــــــــــل

نحلل : (٢ ^{س} – ٣) (٢ ^{س} – ٥) = ٠ ⟸ ∴ ٢ ^{س} = ٣ أ، ٢ ^{س} = ٥

لو ٢ ^{س} = لو٣ أ، لو٢ ^{س} = لو٥ ∴ س لو ٢ = لو٣ أ، س لو٢ = لو٥

∴ س = $\frac{\text{لو٣}}{\text{لو ٢}}$ = ١,٦ أ، س = $\frac{\text{لو٥}}{\text{لو ٢}}$ = ٢,٣ ∴ س = { ٢,٣ ، ١,٦ }

مثـــ١٠ـــال: إذا كان س ص = ٤ $\sqrt{٢}$ أوجد قيمة : ٥ لو$_{٢}$ س + ٤ لو$_{٢}$ ص – لو$_{٢}$ س^{٣} ص^{٢}

الحـــــــــــل

المقدار = لو$_{٢}$ $\frac{\text{س}^{٥} \times \text{ص}^{٤}}{\text{س}^{٣} \times \text{ص}^{٢}}$ = لو$_{٢}$ س^{٢} ص^{٢} = لو$_{٢}$ (س ص)^{٢}

= لو$_{٢}$ (٤ $\sqrt{٢}$)^{٢} = لو$_{٢}$ ٣٢ = لو$_{٢}$ ٢ ^{٥} = ٥ لو$_{٢}$ ٢ = ٥ × ١ = ٥

مثـــ١١ـــال: إذا كان : ٧لوس + ٤ لوص – لوس^{٥} ص^{٢} = ٢(لو٢ + لو٣)

إثبت أن س = $\frac{٦}{\text{ص}}$

الحـــــــــــل

لوس^{٧} + لوص^{٤} – لوس^{٥}ص^{٢} = ٢ لو ٦

لو $\frac{\text{س}^{٧} \times \text{ص}^{٤}}{\text{س}^{٥} \times \text{ص}^{٢}}$ = لو ٦ ^{٢} ⟸ لو س^{٢} ص^{٢} = لو ٣٦

س^{٢} ص^{٢} = ٣٦ ⟸ س ص = ٦ ∴ س = $\frac{٦}{\text{ص}}$

مثـــ١٢ـــال : إذا كان : $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٥}}$ = $\frac{\text{لو ٩}}{\text{لو ٣}}$ = $\frac{\text{لو ٤٩}}{\text{لو ص}}$ أوجد قيمتى س ، ص

الحـــــــــــل

$\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٥}}$ = $\frac{\text{لو (٣)}^{٢}}{\text{لو ٣}}$ = $\frac{\text{لو (٧)}^{٢}}{\text{لو ص}}$

$\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٥}}$ = $\frac{\text{٢ لو ٣}}{\text{لو ٣}}$ = $\frac{\text{٢ لو ٧}}{\text{لو ص}}$ ⟸ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٥}}$ = ٢ = $\frac{\text{٢ لو ٧}}{\text{لو ص}}$

لو س = ٢ لو ٥ = لو (٥)^{٢} = لو ٢٥ ∴ س = ٢٥

، ٢ لو ص = ٢ لو ٧ ∴ ص = ٧

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

تمـــارين على خواص اللوغاريتمات

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) ٢ لو$_{٦}$ ٢ + ٢ لو$_{٦}$ ٣ =

(أ) ٦ (ب) ٣٦ (ج) ٢ (د) ١٢

(٢) لو$_{٢}$ ٥ × لو$_{٥}$ ٢ =

(أ) ١ (ب) ١٠ (ج) $\frac{٥}{٢}$ (د) صفر

(٣) لو$_{٥}$ ٢ × لو$_{٣}$ ٥ × لو$_{٢}$ ٣ =

(أ) ٣٠ (ب) ١ (ج) صفر (د) لو ٣٠

(٤) عَبِّر عن كلٍّ ممايأتى بدلالة لو س ، لو (س + ١)

(أ) لو س (س+١) (ب) لو $\frac{س}{س+١}$ (ج) لو $\sqrt{س}$ (س+١)^{٢}

(٥) اختصْر لأبسطِ صورة:

(أ) لو$_{٦}$ ٥٤ - لو$_{٦}$ ٩ (ب) لو$_{٦}$ ٢ + لو$_{٦}$ ٣ (ج) لو$_{٢}$ ١٢ + لو$_{٢}$ $\frac{٢}{٣}$

(د) لو ٤٨ + لو ١٢٥ - لو ٦ (هـ) $\frac{١ - لو ٢}{لو ١٢٥}$ (و) $\frac{لو ٤٩ + ٣ لو ٧}{لو ٧}$

(ز) لو$_{٢}$ ١٦ + لو$_{٣}$ $\sqrt{٣}$ + لو ٠,١ (ح) $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ أ + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ ب + ٢ لو$_{٣}$ جـ - لو$_{٣}$ $\sqrt{أب}$ - لو$_{٣}$ ٣جـ^{٢}

(٦) أوجد فى ح مجموعة حلَّ كلٍّ من المعادلات الآتية:

(أ) لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س+٢) = ٣ (ب) لو س + لو (س-٣) = ١ (ج) لو$_{٥}$ س - لو$_{٥}$ ٢ = ٢

(د) لو (س+٣) - لو ٣ = لو س (هـ) $\frac{١}{لو_{٢} س}$ + $\frac{١}{لو_{٢} س}$ = ٢ (و) لو س - $\frac{٣}{لو س}$ = ٢

(٧) أثبت أنَّ لو$_{ب}$ أ × لو$_{جـ}$ ب × لو$_{ء}$ جـ × لو$_{أ}$ ء = ١ ثم احسب قيمة لو$_{٢}$ ٣ × لو$_{٣}$ ٥ × لو$_{٥}$ ١٦

(٨) أوجد قيمة س فى كلٍّ مما يأتى مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

(أ) ٣^{س} = ٧ (ب) ٥$^{س-١}$ = ٢ (ج) ٤ × ٧$^{س-٢}$ = ١ (د) ٢$^{س-٣}$ = ٣$^{س+١}$

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

امثلة عامة

مثال١ : إذا كانت س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ إثبت أن لو (س + س$^{-١}$) = ١

الحل

س$^{-١}$ = $\frac{١}{س}$ = $\frac{١}{٥ + ٢\sqrt{٦}} \times \frac{٥ - ٢\sqrt{٦}}{٥ - ٢\sqrt{٦}}$ = $\frac{٥ - ٢\sqrt{٦}}{٢٥ - ٢٤}$ = ٥ − ٢ $\sqrt{٦}$

الأيمن = لو (٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ + ٥ − ٢ $\sqrt{٦}$) = لو ١٠ = ١ الأيسر

مثال٢ : إذا كان س = ٨ − ٣ $\sqrt{٧}$ إثبت أن لو$_{٢}$ (س + س$^{-١}$) = ٤

الحل

س$^{-١}$ = $\frac{١}{س}$ = $\frac{١}{٨ - ٣\sqrt{٧}} \times \frac{٨ + ٣\sqrt{٧}}{٨ + ٣\sqrt{٧}}$ = $\frac{٨ + ٣\sqrt{٧}}{٦٤ - ٦٣}$ = ٨ + ٣ $\sqrt{٧}$

الأيمن = لو$_{٢}$ (٨ − ٣ $\sqrt{٧}$ + ٨ + ٣ $\sqrt{٧}$) = لو$_{٢}$ ١٦

= لو$_{٢}$ (٢)^{٤} = ٤ لو$_{٢}$ ٢ = ٤ الأيسر

مثال٣ : إذا كان س = ٢ − $\sqrt{٣}$ ، ص = ٢ + $\sqrt{٣}$ إثبت أن لو س ص = ١

الحل

س ص = (٢ + $\sqrt{٣}$) (٢ − $\sqrt{٣}$) = ٤ − ٣ = ١

المقدار لو س ص = لو ١ = صفر

مثال٤ : حل المعادلة لو(س+٢) + لو(س - ٢) = ١ − لو ٢

الحل

لو (س +٢) (س − ٢) = لو ١٠ − لو ٢

لو س^{٢} − ٤ = لو ٥ ⟸ س^{٢} − ٤ = ٥ ∴ س^{٢} = ٩

∴ س = ٣ ∴ م.ح = { ٣ }

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

مثـــ٥ـــال: أوجد قيمة س التى تحقق أن : لـــو س = $\frac{(\text{لو}٥)^{٢} - \text{لو}١٢٥}{\text{لو } ٠,٠٠٥}$

الحـــــــــل

لـو س = $\frac{(\text{لو}٥)^{٢} - ٣ \text{ لو}٥}{\text{لو } ٥ - \text{لو } ١٠٠٠}$ = $\frac{\text{لو}٥ [\text{لو}٥ - ٣]}{\text{لو } ٥ - ٣}$ = لـو ٥

لـو س = لو ٥ ∴ س = ٥

مثـــ٦ـــال : حل ل المعادلة س لو س = ١٠

الحـــــــــل

بأخذ لوغاريتم الطرفين

لو س لو س = لو ١٠ ⟸ لو س لو س = ١

$(\text{لو س})^{٢}$ = ١ ∴ لو س = | ١ |

لو س = ١ ⟸ س = ١٠ أ، لو س = -١ ⟸ س = ٠,١

∴ م.ح = { ١٠ ، ٠,١ }

مثـــ٧ـــال : حل المعادلة $\text{س}^{\text{لو}_٢ \text{س}}$ = ٤ س

الحـــــــــل

بأخذ لوغاريتم للطرفين لـو$_٢$ س لو$_٢$ س = لو$_٢$ ٤ س

لـو$_٢$ س × لـو$_٢$ س = لـو$_٢$ ٤ + لو$_٢$ س ⟸ $(\text{لـو}_٢ \text{س})^{٢}$ = ٢ + لـو$_٢$ س

$(\text{لو}_٢ \text{س})^{٢}$ – لو$_٢$ س – ٢ = ٠ نحلل (لو$_٢$ س – ٢) (لو$_٢$ س +١) = ٠

∴ لـو$_٢$ س = ٢ ∴ س = $٢^{٢}$ = ٤ أ، لـو$_٢$ س = -١ ∴ س = $٢^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$

مثـــ٨ـــال : حل المعادلة لو $\sqrt[٣]{٣\text{س} - ١}$ + لـو $\sqrt[٣]{\text{س} - ٢}$ = لـو٢

الحـــــــــل

لـو $\sqrt[٣]{(٣\text{س} - ١)(\text{س} - ٢)}$ = لو ٢

$(٣\text{س} - ١)^{\frac{١}{٣}} \times (\text{س} - ٢)^{\frac{١}{٣}}$ = ٢ بالتكعيب (٣ س – ١) (س – ٢) = ٨

$٣\text{س}^{٢}$ – ٧ س +٢ = ٨ ⟸ ٣ $\text{س}^{٢}$ – ٧ س – ٦ = ٠

نحلل (٣س +٢) (س – ٣) = ٠ ∴ س = $-\frac{٢}{٣}$ ، س = ٣

تمارين عامة

[١] أوجد قيمة كل من :

(١) لو$_{٥}$ ٤٠ − لو$_{٥}$ ١٦ + لو$_{٥}$ ١٠

(٢) لو$_{٤}$ ٢ + لو$_{٤}$ ٥٦ − لو$_{٤}$ ٤٢ + لو$_{٤}$ ٢٤

(٣) لو ٣ − لو ٤ + لو ١٢ − ٢ لو ٠.٣

(٤) لو$_{٩}$ ٠.٤ − ٢ لو$_{٩}$ $\frac{٣}{٢}$ ٣ + لو$_{٩}$ $\frac{٥}{٨}$

(٥) لو ٦٤ − لو ٦٠ − لو ٨ + لو ٣ − لو ٤

(٦) ٣ لو $\frac{٥}{٣}$ − ٢ لو $\frac{٥}{٧}$ − ٤ لو $\frac{١}{٣}$ − لو $\frac{١}{٢}$ ٧٣

(٧) لو $\frac{٦}{٥}$ + ٢ لو $\frac{١٥}{٢}$ − ٥ لو ٣ + لو ٥ − لو $\frac{٥}{٣٦}$

(٨) ٢ لو ٢٥ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + $\frac{١}{٥}$ لو ٢٤٣ + لو ٠.٠١

[٢] إثبت أن :

(١) لو $\frac{٩٨}{٢٧}$ + لو $\frac{٢٥}{٤٩}$ − لو $\frac{١}{٥٤}$ = لو$_{٥}$ ٢٥

(٢) لو$_{٢}$ $\frac{٤٠}{١٣}$ − لو$_{٢}$ $\frac{٧}{١٢}$ + لو$_{٢}$ $\frac{٩١}{٦٠}$ = لو$_{٣}$ ٢٧

(٣) لو$_{٣}$ ٢٥ + لو$_{٣}$ ٧ − لو$_{٣}$ ١٧٥ = ٢ لو$_{٣}$ $\sqrt{٣}$

(٤) لو ٠.٧٥ + لو ١٢ − ٢ لو ٠.٣ = لو$_{٦}$ ٣٦

(٥) $\frac{\text{١ + لو ٢ − لو ٤٥}}{\text{١ − لو ١٥}}$ = ٢

(٦) $\frac{\text{لو } \sqrt{١٢٥} + \text{لو ٢٧} - \text{لو } \sqrt{١٠٠٠}}{\text{لو ٩ − لو ٢}}$ = $\frac{٣}{٢}$

[٣] أوجد قيمة س فيما يلى :

(١) لو س + لو ٤.٩ = لو ٣٥ − لو ١٢٥ + لو ١٧٥

(٢) لو س + لو ٦٠ = لو ٦٤ − لو ٨ + لو ٣ − لو ٤

(٣) لو$_{٦}$ س = لو$_{٥}$ ١٠ − ٢ لو$_{٥}$ ٣ + ٠.٥ لو$_{٥}$ ٨١ − لو$_{٥}$ ٠.٤

(٤) لو$_{٢}$ س = لو ٣ + لو ١٢ − ٢ لو ٠.٣

(٥) لو (س − ١) + لو (س + ١) = لو ٨

(٦) لو (س − ١)^{٣} − ٣ لو (س − ٣) = لو ٨

(٧) لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س + ٢) = ٣

(٨) لو$_{٣}$ (س^{٢} + ٤س + ٤) − لو$_{٣}$ (٢ س − ٥) = لو$_{٥}$ ٢٥

(٩) لو$_{٢}$ (س^{٢} + ٦س + ٩) − لو$_{٢}$ (س − ١) = لو$_{٥}$ ٦٢٥

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

[٤] أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية : -

(١) (لو$_{٢}$ س)^{٢} + ٢ لو$_{٢}$ س = ٨

(٢) (لو$_{٣}$ س)^{٢} – ٣ = ٢ لو$_{٣}$ س

(٣) لو س + $\frac{٢}{لو س}$ = ٣

(٤) لو$_{٢}$ س + $\frac{٣}{لو_{٢} س}$ = ٤

(٥) لو | س | = ٢

(٦) لو$_{٣}$ | س + ١ | = ٢

(٧) لو (٨ – س) + ٢ لو $\sqrt{س – ٦}$ = ٠

(٨) لو$_{٢}$ س = لو$_{٨}$ ٢٧

(٩) لو (٣ – س) + ٢ لو $\sqrt{س – ٥}$ = ٠

(١٠) لو$_{٣}$ س = لو$_{٩}$ ٤

(١١) لو٤ لو٢ لو٣ (٢ س + ١) = ٠

(١٢) لو ٠,٢٥ = ٢٧ س^{٢} – ١٥ س

(١٣) لو$_{١}$ لو$_{٣}$ $\sqrt[٣]{٢ س}$ = ٠

(١٤) (لو س + ١) لو ($\frac{س}{١٠}$) = ٣

(١٥) لو$_{٣}$ (س^{٢} – ٩) – لو$_{٣}$ (س – ٣) = ٢

(١٦) ٢$^{(لو س)^{٢}}$ × ٤ = ٢$^{لو س}$

(١٧) | س + ٣ | + (س + ٢)^{٢} = لو$_{٢}$ ٣٢ ، س ∋ ص

[٥] أجب عما يلى :

١) إذا كان : س ص = ٩ $\sqrt{٣}$ فأثبت أن : ٤ لو$_{٣}$ س + ٥ لو$_{٣}$ ص – لو$_{٣}$ س^{٢} ص^{٣} = ٥

٢) إذا كان : ب^{س} – ٢ ب$^{-س}$ = ١ فإثبت أن : س لو ب = لو ٢ أ؛ س = لو$_{ب}$ ٢

٣) إذا كان: لو أ = جـ + لو ب فإثبت أن : أ = ب × ١٠^{جـ}

٤) إذا كان : ٣ لو أ – لو أ جـ^{٢} + ٤ لو جـ = ٢(لو ٣ + لو ٤) فإثبت أن : أ جـ = ١٢

٥) إذا كان : لو$_{٢}$ د(س) = س فإثبت أن : د(١) × د(٢) × د(٣) = ٦٤

٦) إذا كان: $\sqrt[٥]{س}$ = $\sqrt[٧]{ص}$ = $\sqrt[٩]{ع}$ فإثبت أن : ص^{٢} = س ع

٧) إذا كان: لو٢ = ٠.٣٠١٠ ؛ لو٣ = ٠.٤٧٧١ فإوجد: لو٨ ؛ لو٦ ؛ لو٥

٨) إذا كان : لو$_{٢}$ ٥ = ٢ . ٣ ؛ لو$_{٢}$ ٧ = ٢ . ٨ فإوجد: لو$_{٢}$ ١٤ ؛ لو$_{٢}$ ٧٠

٩) إذا كان : لو$_{٣}$ ٦ = س فإثبت أن : لو$_{٩}$ ٨١ – لو$_{٣}$ (ـ٤) = ٤ – س

١٠) إذا كان : لوس ص = ٤ – لو٥ ؛ لوص^{٤} = ٨ – لو١٦ فإوجد قيمة كلا من: س ؛ ص

١١) إذا كان : س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ فإثبت أن لو (س + س$^{-١}$) = ١

١٢) إذا كان : س = ٨ + ٣ $\sqrt{٧}$ فإثبت أن لو$_{٤}$ (س + س$^{-١}$) = ٢

١٣) إذا كان: لو س + لو(س – ١٥) = لو٣٥ – لو٧ + لو٢١ فأوجد قيمة : س

١٤) إذا كان : $\frac{لوس}{لو٥} = \frac{لو٣٦}{لو٦} = \frac{لو٦٤}{لو ص}$ فأوجد قيمة كلا من : س ؛ ص

١٥) إذا كان: $٣^{س - ٢}$ = ٣لو$_٢$ ١٤ – ٤ لو$_٢$ ٥ + ٢ لو$_٢$ ($\frac{٢٥}{}$) – لو$_٢$ ٧ فأوجد قيمة : س

[٦] بإستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س مقربا الناتج لرقميين عشريين

١) $٣^{س - ٢}$ = ٨.١   ٢) $٨^{س + ١}$ = $٩^{س - ١}$

٣) $٢^{٢س + ١}$ = ١٥٠   ٤) $٥^{س - ١}$ = ($٦^{س}$ ÷ ٣٦)

٥) $١٨^{٣س - ٥}$ = ٧.١٢   ٦) (٣٦ ÷ $٦^{٤س}$) × $٤^{٥ + س}$ = ٨

[٧] بإستخدام حاسبة الجيب أوجد قيم س مقربا الناتج لرقم عشرى

١) $٢^{٢س}$ – ١٠ × $٢^{س}$ + ٢٤ = ٠   ٢) $٢٥^{س}$ – ١٢ × $٥^{س}$ + ٣٥ = ٠

٣) ٣ × $٥^{٢س + ١}$ = ٢٥ × $٩^{س + ١}$ ٤) $(١ + س)^{٣٠}$ = ١٠٠٠

٥) إذا كان د(س) = $٢^{س}$ ؛ د(٢س + ١) + د(٢س – ١) = ٣٥

٦) إذا كان د(س) = $٣^{س}$ ؛ د(س) + د(س – ٢) = ٢٠٠

٧) إذا كان د$_١$(س) = $٨^{س}$ ؛ د$_٢$(س) = $٤^{س}$ ؛ د$_١$(٢ س) + د$_٢$(٣س – ١) = ٨٢

[٨] تمارين على تمثيل الدالة

١) مثل منحنى الالة د(س) = لو$_٢$ س متخذا س ∋ [ـ١ ، ٨] ومن الرسم
أوجد قيمة لو$_٢$ ٥ , ٢

٢) مثل منحنى الدالة د(س) = لو$_٣$ س متخذا س ∋ [ـ١ ٠ ، ٢٧] ومن الرسم
أوجد قيمة لو$_٣$ ٤,٥

٣) مثل منحنى الدالة د(س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س متخذا س ∋ [ـ١ ، ٨] ومن الرسم
أوجد قيمة لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥ ؛ قيمة س عندما د(س) = ٢

٤) أوجد بيانيا مجموعة حل المعادلة : لو$_٢$ س = ٣ – س

مذكرة التفاضل

النهايات والأتصال

الصف الثاني الثانوى

القسم العلمى

الفصل الدراسي الأول ٢٠٢٠

النهايـــات والأتصال

- مقدمة إيجاد النهاية تقدير النهاية عدديا وبيانيا
- نهاية دالة عند نقطة جبريا.
- نظرية (٤) القانون.
- نهاية دالة عند اللانهاية.
- نهاية الدوال المثلثية
- بحث وجود نهاية للدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

الكميات المعينة وغير المعينة وغير المعرفة

(١) مفاهيم ورموز وتمهيدات

ح = مجموعة الأعداد الحقيقية =] – ∞ ، ∞ [

$ح^+$ = مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة =] ٠ ، ∞ [

$ح^-$ = مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة =] – ∞ ، ٠ [

** أنواع الكميات :

(١) الكمية المعينة : هى الكمية التى لها جواب محدد مثل : ٣ – ٥ ، ٩ × ٨ ، ٧ ÷ ٤

(٢) الكمية غير المعرفة : هى الكمية التى لا معنى لها مثل : $\frac{أ}{صفر}$ ، أ ≠ ٠

---

(٢) الرمزان ∞ ، – ∞ :

❖ الرمز ∞ يرمز لأى كمية تكون أكبر من أى عدد حقيقى موجب يمكن إدراكه

❖ الرمز – ∞ يرمز لأى كمية تكون أصغر من أى عدد حقيقى سالب يمكن إدراكه

❖ إذا كان : أ ∈ ح فإن : ∞ ± أ = ∞ ، – ∞ ± أ = – ∞

، ∞ × أ = { ∞ عندما أ > ٠ ، – ∞ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠ }

– ∞ × أ = { – ∞ عندما أ > ٠ ، ∞ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠ }

(٣) **الكمية الغير المعينة :** هى الكمية التى لا نستطيع أن نجد لها جواباً محدداً حيث يكون لها عدد لا نهائى من الحلول مثل : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ " كمية غير معينة "

* يوجد عدد لا نهائى من الأعداد الحقيقية إذا ضربت فى صفر كان الناتج = صفراً

∵ ٠ × أى عدد = ٠ ∴ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ = أى عدد (غير معينة)

∵ ∞ × أى عدد = ∞ ∴ $\frac{\infty}{\infty}$ = أى عدد (غير معينة)

∵ ∞ + أى عدد = ∞ ∴ ∞ − ∞ = أى عدد (غير معينة)

∵ $\frac{\text{أى عدد}}{\infty}$ = صفر ∴ ٠ × ∞ = أى عدد (غير معينة)

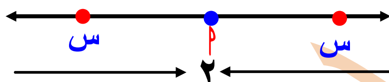
العامل الصفرى :

إذا كانت د دالة فى المتغير س على صورة كثيرة حدود من درجة ن وكانت د (ٲ) = ٠ حيث ٲ ∈ ح فإن المقدار (س − ٲ) يسمى العامل الصفرى للدالة د

وهذا يعنى أن : د (س) يقبل القسمة على (س − ٲ) بدون باق

أى أن : د (س) = (س − ٲ) × كثيرة حدود أخرى

** **مفهوم الرمز " ← " فى النهايات :**



إذا تصورنا أن س نقطة تتحرك على خط الأعداد فإن موضعها عند كل نقطة أثناء حركتها يعين عدداً حقيقياً ما .

قيل أن س تقترب من العدد ٢ من خلال قيم أكبر قليلاً من العدد ٢ تقترب ٢ من اليمي

أ، قيل أن س تقترب من العدد ٢ من خلال قيم أصغر قليلاً من العدد ٢ تقترب ٢ من اليسار

وإذا أقتربت س من العدد ٢ من جهة اليمين ومن اليسار قيل إن س تقترب من العدد ٢

ونعبر عن ذلك رمزياً بالصورة : س ← ٢

تقدير النهاية عددياً وبيانياً

إذا أردنا إيجاد قيمة الدالة د : د(س) = $\frac{س^2 - ١}{س - ١}$ عند س = ١

بالتعويض عن قيمة س = ١ فإن د(١) = $\frac{(١)^2 - ١}{١ - ١}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

ولذلك نلجأ إلى دراسة نهاية د(س) عندما س تقترب إلى العدد (١)

[١] الطريقة العددية

	س تقترب جداً من (١) من اليمين ⟸					س تقترب جداً من (١) من اليسار ⟹				
س	١,٤	١,٣	١,٢	١,١	١,٠١	١	٠,٩٩	٠,٩	٠,٨	٠,٧	٠,٦
د(س)	٢,٤	٢,٣	٢,٢	٢,١	٢,٠١	غير معينة	١,٩٩	١,٩	١,٨	١,٧	١,٦
	د(س) تقترب جداً من (٢) من اليمين ⟸ ⟹ د(س) تقترب جداً من (٢) من اليسار										

وهذة الطريقة تسمى $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٢

وتقرأ : نهاية د(س) عندما تقترب س من ١ تساوى ٢

تعريف :

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة (ل) عندما تقترب س من ﻡ من جهتى اليمين واليسار فإن نهاية د(س) تساوى (ل) وتكتب رمزياً $\lim_{س \to ﻡ}$ د(س) = ل

[٢] تقدير النهاية بيانياً

د(س) = $\frac{س^2 - ١}{س - ١}$ غير معينة عند س ⟵ ١

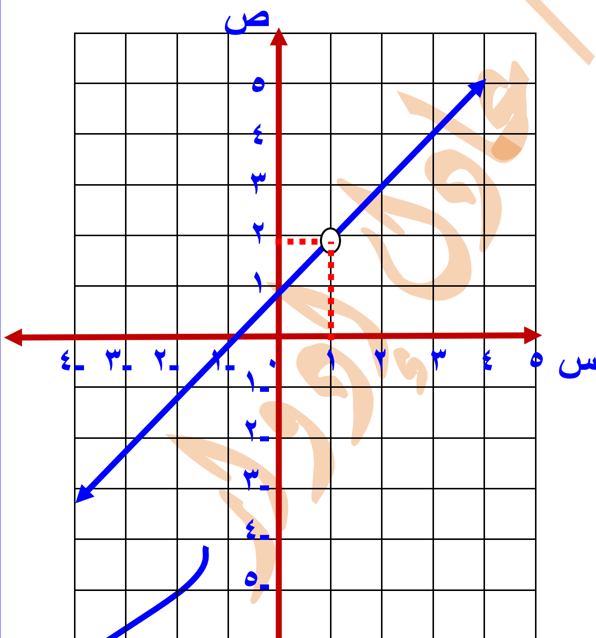
د(س) = $\frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)}$ = (س + ١)

ومن الرسم نجد أن د (س) = ١+١=٢

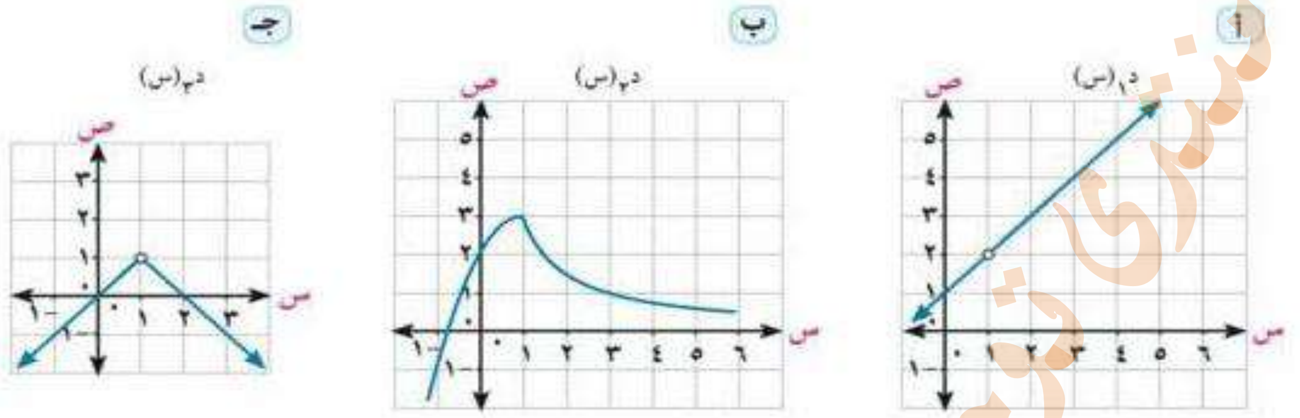
عندما : س ⟵ ١ من اليمين واليسار

فإن د(س) ⟵ ٢ من فوق وتحت

فيكون : $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٢



مثـــ١ـــال : قدر نهاية الدالة د(س) عندما س ← ١

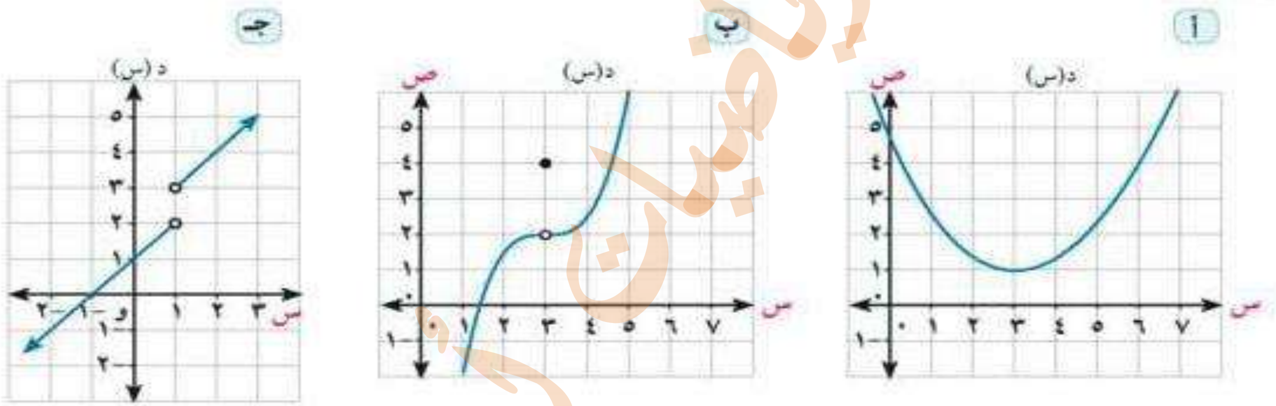


(أ) نهـــــــا د(س) = ٢
س ← ١

(ب) نهـــــــا د(س) = ٣
س ← ١

(جـ) نهـــــــا د(س) = ١
س ← ١

مثـــ٢ـــال : قدر نهاية الدالة د(س) عند النقط المبينة



(أ) نهـــــــا د(س) = ١
س ← ٣

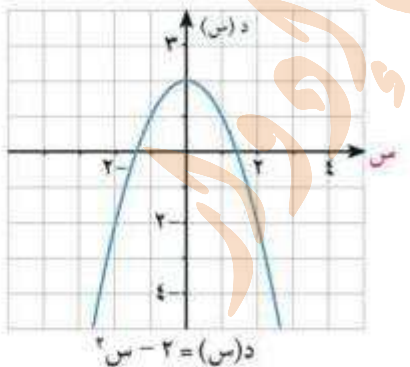
(ب) نهـــــــا د(س) = ٢
س ← ٣

(جـ) نهـــــــا د(س) =
س ← ١

غير موجودة

ليس من الضرورى أن قيمة الدالة
تساوى قيمة النهاية

مثـــ٣ـــال : من الشكل البيانى المقابل

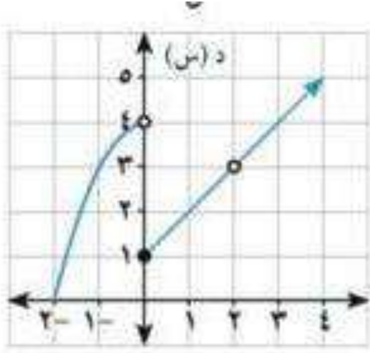


(أ) نهـــــــا (٢ ـ س٢) = ٢
س ← ٠

(ب) د(صفر) = ٢

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوارد

مثـــ٤ـــال : من الشكل البيانى المقابل



(أ) د(٠) = ١

(ب) د(٢) غير معرفة

(جـ) $\lim_{س \leftarrow ٠}$ د (س) = غير موجودة

(د) $\lim_{س \leftarrow ٢}$ د (س) = ٣

مثـــ٥ـــال: أكمل الجدول الآتى وأستنتج $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{(س^٢ - ٤)}{(س - ٢)}$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	٢	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)	٣,٩	٣,٩٩	٣,٩٩٩	٤	٤,٠٠١	٤,٠١	٤,١

د(س) = $\frac{(س^٢ - ٤)}{(س - ٢)}$ غير معينة عند س ⟵ ١

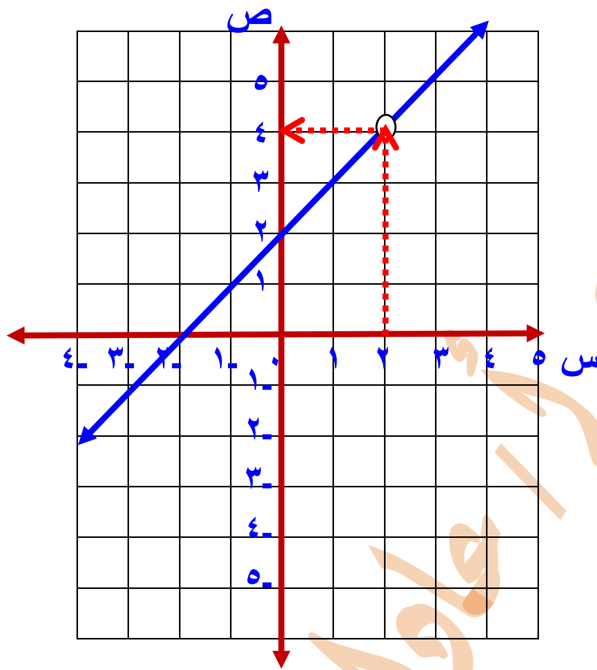
د(س) = $\frac{(س - ٢)\ (س + ٢)}{(س - ٢)}$ = (س + ٢)

ومن الرسم نجد أن د (س) = ٢+٢ = ٤

عندما : س ⟵ ٢ من اليمين واليسار

فإن د(س) ⟵ ٤ من فوق وتحت

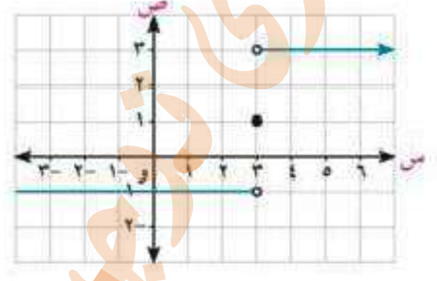
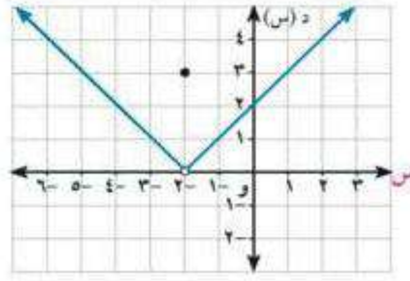
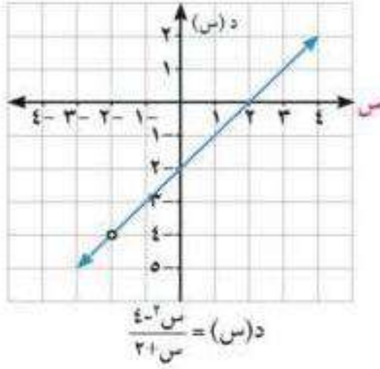
فيكون : $\lim_{س \leftarrow ٢}$ د(س) = ٤



تمـــارين

(١) قدّر نهاية الدالة د(س) عند النقط المبينة

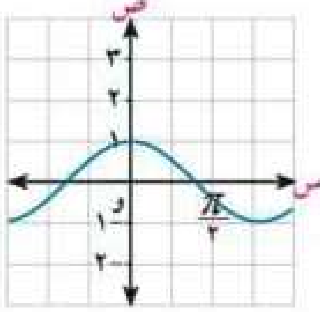
Ⓐ $\lim_{س \leftarrow ٣}$ د(س)   Ⓑ $\lim_{س \leftarrow -٢}$ د(س)   Ⓒ $\lim_{س \leftarrow ٢}$ د(س)

(٢) من الرسم البيانى أوجد

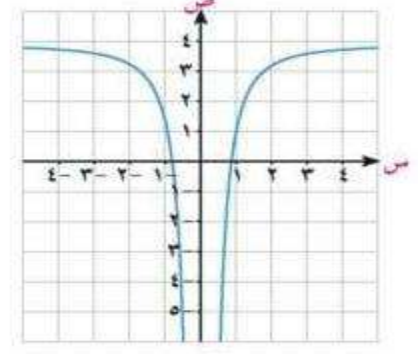
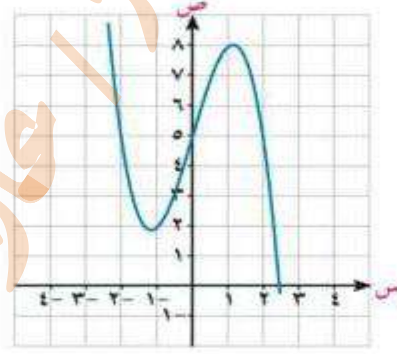
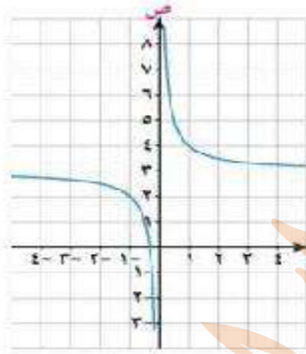
Ⓐ $\lim_{س \leftarrow ٠}$ د(س)

Ⓑ د(٠)



(٣) قدّر نهاية الدالة د(س) عند س ← صفر

Ⓐ   Ⓑ   Ⓒ

(٤) أكمل الجدول الآتى وأستنتج $\lim_{س \leftarrow -١} \frac{(س^٢ - ١)}{(س - ١)}$

س	-١,١	-١,٠١	-١,٠٠١	-١	-٠,٩٩٩	-٠,٩٩	-٠,٩
د(س)				؟؟؟؟			

(٥) باستخدام الحاسبة قدّر نهاية الدوال الآتية

(أ) نهـــا (٣س - ١) عندما س ← ٢ (ب) نهـــا (س٢ + ٢) عندما س ← ١

(جـ) نهـــا (س - ١) / (س٣ - ١) عندما س ← ١ (د) نهـــا (س٢ - ٤س + ٣) / (س - ٣) عندما س ← ٣

نهاية دالة عند نقطة

مثال : إذا كانت د (س) = ٣ س + ٤ إوجد د (س) عندما س ← ٠

الحـــــل

∵ س ← ١ ∴ نضع س = ١ + هـ حيث عندما س ← ١ فإن هـ ← ٠

∴ د (س) = ٣ (١ + هـ) + ٤ = ٣ + ٣ هـ + ٤ = ٧ + ٣ هـ

∴ د (س) ← ٧ عندما س ← ١

أى أن نهاية الدالة د(س) تساوى ٧ عندما س تؤول إلى ١

ويعبر عن ذلك بالصورة : نهـــا (٣ س + ٤) = ٧ عندما س ← ١

ملاحظة : فى المثال السابق نحصل على نفس النتيجة بالتعويض المباشر

نظرية : نهاية دالة كثيرة الحدود

نظـــرية (١)

* إذا كانت د (س) كثيرة حدود فى المتغير س فإن : نهـــا د (س) = د (أ) عندما س ← أ

فمثلا : نهـــا (٣ س + ٤) = د (٣) = ٣ × ٣ + ٤ = ١٣

نتيجة : نهاية الدالة الثابتة : إذا كانت د (س) = ل حيث ل ثابت

فإن : نهـــا د (س) = ل عندما س ← أ

فمثلا : د (س) = ٤ ، نهـــا د(س) = ٤ عندما س ← ٢

نظرية (٢) : إذا كانت د ، ر دالتين فى المتغير س

وكانت : نهـا د (س) = ل ، نهـا ر (س) = م فإن :

(١) نهـا س ← أ [د (س) ± ر (س)] = نهـا س ← أ د (س) ± نهـا س ← أ ر (س)

= ل ± م

أى أن : نهاية المجموع الجبرى لدالتين (أو أكثر) = المجموع الجبرى لنهايتيهما

(٢) نهـا س ← أ [د (س) × ر (س)] = نهـا س ← أ د (س) × نهـا س ← أ ر (س)

= ل × م

أى أن : نهاية حاصل ضرب دالتين (أو أكثر) = حاصل ضرب نهايتيهما (النهايات)

(٣) نهـا س ← أ ك × د (س) = ك نهـا س ← أ د (س) = ك × ل حيث ك ثابت

أى أن : نهاية حاصل ضرب ثابت × دالة = الثابت × نهاية هذه الدالة

(٤) نهـا س ← أ $\frac{\text{د (س)}}{\text{ر (س)}}$ = $\frac{\text{نهـا س ← أ د (س)}}{\text{نهـا س ← أ ر (س)}}$ = $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ حيث : م ≠ صفر

أى أن :

نهاية خارج قسمة دالتين = خارج قسمة نهايتيهما حيث : نهاية المقسوم عليه ≠ صفر

لإيجاد: نهـا س ← أ د (س) نوجد د (أ) بالتعويض المباشر فإذا كان الناتج :

١ ـ عدداً حقيقياً فإن نهاية الدالة عند س = أ هى هذا العدد الحقيقى

٢ ـ $\frac{\text{عدداً حقيقى} \neq \text{الصفر}}{\text{صفر}}$ " كمية غير معرفة " فإن الدالة لا يكون لها نهاية عند أ

٣ ـ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة تستخدم النظرية التالية

٤ ـ $\frac{\text{أ}}{\pm\infty}$ = صفر

نظرية (٣) : إذا كانت د ، ق دالتين فى المتغير س

وكانت د (س) = ق (س) لجميع قيم س فيما عدا عند س = م

وكانت : نهـــــا (س ← م) ق (س) لها وجود

فإن : نهـــــا (س ← م) ق (س) = نهـــــا (س ← م) د (س)

تستخدم هذه النظرية لإيجاد نهاية دالة كسرية جبرية وفيها نختصر العامل الصفرى (س – م) فى كل من البسط والمقام ويسمى عن طريق عدة طرق :

منها (!) التحليل ، (!!) القسمة المطولة ، (!!!) الضرب فى المرافق ....

مراجعة على التحليل : يراعى أولا إخراج العامل المشترك الأعلى

الفرق بين مربعين : س^{٢} – ٩ = (س – ٣) (س + ٣)

الفرق بين مكعبين : س^{٣} – ٨ = (س – ٢) (س^{٢} – ٢ س + ٤)

مجموع مكعبين : س^{٣} + ٢٧ = (س + ٣) (س^{٢} + ٣ س – ٩)

المقدار الثلاثى : إذا كان معامل س^{٢} = ١

س^{٢} + ٥ س + ٦ = (س + ٣)(س + ٢)

س^{٢} + ٥ س – ٦ = (س – ١)(س + ٦)

س^{٢} – ٦ س – ١٦ = (س – ٨)(س + ٢)

إذا كان معامل س^{٢} ≠ ١

٣ س^{٢} + ١١ س + ٦ = (س + ٣)(٣ س + ٢)

٢ س^{٢} – ٥ س + ٢ = (٢ س – ١)(س – ٢)

٣ س^{٢} + ٧ س – ٦ = (س + ٣)(٣ س – ٢)

٣ س^{٢} – ١٧ س – ٦ = (س – ٦)(٣ س + ١)

المقدار الثلاثى المربع الكامل :

س^{٢} + ٦ س + ٩ = (س + ٣)^{٢}

٢٥ س^{٢} – ٤٠ س + ١٦ = (٥ س – ٤)^{٢}

أمثلة : أوجد كلاً مما يلى :

مثـال ١ : $\lim_{س \to ١} \frac{٣ س + ٤}{س + ٥}$

الحـل

بالتعويض نجد أن : $\lim_{س \to ١} \frac{٣ س + ٤}{س + ٥} = \frac{٣ \times ١ + ٤}{١ + ٥} = \frac{٧}{٦}$

مثـال ٢ : $\lim_{س \to -١} \frac{٣ س + ٤}{س + ١}$

الحـل

بالتعويض نجد أن :

$\lim_{س \to -١} \frac{٣ س + ٤}{س + ١} = \frac{٣ \times (-١) + ٤}{-١ + ١} = \frac{١}{٠}$ كمية غير معرفة

∴ الدالة ليس لها نهاية أو النهاية ليس لها وجود

إستخدام التحليل لإيجاد نهاية دالة عند نقطة :

مثـال ٣ : $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$

الحـل

بالتعويض عن : س = ٣ نجد أن : د (٣) $= \frac{(٣)^٢ - ٩}{٣ - ٣} = \frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

∴ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)}$

$= (س + ٣) = ٦$

مثـال ٤ : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢}$

الحـل

بالتعويض عن س = ٢ نجد أن : د (٢) $= \frac{(٢)^٢ - ٥ \times ٢ + ٦}{٢ - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

∴ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س - ٣)}{(س - ٢)}$

$= (س - ٣) = -١$

مثــ٥ـال : $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهــــــا}} \frac{س^٢ + ٣ س}{س^٢ + س - ٦}$

الحـــــــــل

بالتعويض عن س = ـ ٣ نجد أن : د (ـ ٣) = $\frac{٩ - ٣ \times ٣}{٩ - ٣ - ٦} = \frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

∴ $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهــــــا}} \frac{س^٢ + ٣ س}{س^٢ + س - ٦} = \underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهــــــا}} \frac{س (س + ٣)}{(س - ٢) (س + ٣)}$

$= \underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهــــــا}} \frac{س}{(س - ٢)} = \frac{-٣}{-٣ - ٢} = \frac{٣}{٥}$

إستخدام القسمة المطولة لإيجاد نهاية دالة عند تقطة :

مثــ٦ـال : $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــــــا}} \frac{س^٣ - ٤ س^٢ + س + ٦}{س^٢ - ٤س + ٣}$

الحـــــــــل

بالتعويض عن س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\frac{٣^٣ - ٤ \times ٣^٢ + ٣ + ٦}{٣^٢ - ٤ \times ٣ + ٣} = \frac{صفر}{صفر}$

∴ (س - ٣) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

بإجراء قسمة مطولة للبسط على (س - ٣) " لصعوبة تحليل البسط "

∵ $س^٣ - ٤ س^٢ + س + ٦ \div (س - ٣) = س^٢ - س - ٢$

$\pm س^٣ \mp ٣ س^٢$

$- س^٢ + س + ٦$

$\mp س^٢ \pm ٣ س$

$- ٢ س + ٦$

$\mp ٢ س \pm ٦$

....

∴ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــــــا}} \frac{(س - ٣) (س^٢ - س - ٢)}{(س - ٣) (س - ١)} = \frac{٩ - ٣ - ٢}{٣ - ١} = ٢$

مثــ٧ـال : $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــــــا}} \frac{س^٣ - ٢س + ١}{س^٢ + ٣س - ٤}$

الحـــــــــــل

بالتعويض عن س = ١ نجد أن : د (١) = $\frac{صفر}{صفر}$

∴ (س – ١) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء القسمة بطريقة (القسمة التركيبية)

(١) نكتب معاملات المقسوم مرتبة تنازلياً وتساوى المقسوم علية بالصفر للحصول على قيمة س كما بالشكل

(٢) أترك أول معامل ثم أضرب المعامل الأول فى قيمة س وأكتب الناتج أسفل المعامل الثانى وأجمع

(٣) كرر عمليتى الضرب والجمع

نجد أن معاملات خارج القسمة هى: ١ ، –١ ، –١

على الترتيب فإن خارج القسمة هو س^{٢} – س – ١

١	– ٢	٠	+١	١
	١	□	□	
١	– ١			
١	– ٢	٠	+١	
١	– ١	– ١	– ١	
١	– ١	– ١	٠	

خارج القسمة

س^{٢} – س – ١

∴ نهـــــا (س ← ١) $\frac{(س – ١) (س^{٢} – س – ١)}{(س – ١) (س + ٤)}$ = $\frac{١ – ١ – ١}{١ + ٤}$ = $\frac{١}{٥}$

مثـــ٨ـال : نهـــــا (س ← ٢) $\frac{س^{٣} – ٧ س + ٦}{٣س^{٢} – ٨ س + ٤}$

الحـــــــــــل

بالتعويض عن س = ١ نجد أن : د (١) = $\frac{(١)^{٣} – ٧ × ١ + ٦}{٣(١)^{٢} – ٨ × ١ + ٤}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

∴ (س – ١) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء القسمة بطريقة (القسمة التركيبية)

١	+ ٠	– ٧	– ٦	٢
	٢	□	□	
١	+ ٢	– ٧	– ٦	
١	+ ٢	٤	– ٦	
١	+ ٢	– ٣	٠	

خارج القسمة

س^{٢} + ٢ س – ٣

∴ نهـــــا (س ← ٢) $\frac{(س – ٢)(س^{٢} + ٢ س – ٣)}{(س – ٢)(٣س – ٢)}$

= نهـــــا (س ← ٢) $\frac{(س^{٢} + ٢ س – ٣)}{(٣س – ٢)}$

= $\frac{(٤ + ٤ – ٣)}{(٦ – ٢)}$ = $\frac{٥}{٤}$

الضرب فى المرافق :

إذا وجد فرق بين جذرين تربيعيين لمقدارين جبريين (فى البسط أو المقام أو كليهما)
نضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق (فى البسط أو المقام أو كليهما)

مثـــ٩ـال : $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ٢ س}{\sqrt{س + ٩} - ٣}$

الحـــــــــــل

بالتعويض عن س = ٠ نجد أن : د (٠) = $\frac{(٠)^٢ + ٢ \times ٠}{\sqrt{٠ + ٩} - ٣}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق المقام : $\sqrt{س + ٩} + ٣$ نجد أن :

$$\lim_{س \to ٠} \frac{س (س + ٢)(\sqrt{س + ٩} + ٣)}{(س + ٩) - ٩}$$

$$= (٠ + ٢) (\sqrt{٠ + ٩} + ٣) = ١٢$$

مثـــ١٠ـال : $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س + ١} - ٢}$

الحـــــــــــل

بالتعويض عن س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\frac{٣ - ٣}{\sqrt{٣ + ١} - ٢}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق المقام : $\sqrt{س + ١} + ٢$ نجد أن :

$$\lim_{س \to ٠} \frac{(س - ٣)(\sqrt{س + ١} + ٢)}{(س + ١) - ٤} = (\sqrt{٣ + ١} + ٢) = ٤$$

مثـــ١١ـال : $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{س^٢ - س}{س - ٢} - \frac{٢}{س - ٢} \right)$

الحـــــــــــل

بتوحيد المقامات نجد أن :

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - س - ٢}{س - ٢}$$

بالتعويض عن س = ٢ نجد أن : د (٢) = $\frac{٢^٢ - ٢ - ٢}{٢ - ٢}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

∴ $\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ١)}{س - ٢}$ = ٢ + ١ = ٣

تمـــــــــــارين

أكمـــــــل ما يأتى

(١) $\lim_{س \to ٢}$ (٣س - ١) = ... (٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٣ - ٢٧}{س - ٣}$ = ...

(٣) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$ = ...

(٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ (٢س - جا س) = ...

(٥) إذا كان : $\lim_{س \to ٢} \frac{أ}{س + ١}$ = ٤ فإن : أ = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) $\lim_{س \to ٤}$ (٣س - $\sqrt{س}$) (أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ١٦

(٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{٣س^٢ - ١٢}{س + ٢}$ (أ) ١٨ (ب) -٣ (جـ) ١٢ (د) -١٢

(٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ + س - ١٢}$ (أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) -١ (د) -٥

(٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س}$ (أ) ٠ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) غير معرفة

(٥) ∴ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا س}{س}$ (أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{\pi}$ (د) غير معرفة

أجد كلاً مما يأتى :

١	$\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} + ٦}{\text{س} + ٣}$	٢	$\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٢} + ٩}{\text{س} + ٣}$
٣	$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}{\text{س} - ٢}$	٤	$\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣}$
٥	$\lim_{\text{س} \to -٣} \frac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦}{\text{س} + ٣}$	٦	$\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٣}$
٧	$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س}^{٢} - ٤}$	٨	$\lim_{\text{س} \to -٣} \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٩}$
٩	$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{٢} - ١}{٢\text{س} - ٢}$	١٠	$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{٣\text{س}^{٢} - ١٢}{\text{س}^{٣} - ٨}$
١١	$\lim_{\text{س} \to ٥} \frac{٢\text{س} - ١٠}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}$	١٢	$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤}{\text{س}^{٢} - \text{س}}$
١٣	$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٨}$	١٤	$\lim_{\text{س} \to -٣} \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٢} + ٩\text{س} + ١٨}$
١٥	$\lim_{\text{س} \to -١} \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} - ١}$	١٦	$\lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١٢}{\text{س} - ٤}$
١٧	$\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{٢\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ٣}{\text{س} - ٣}$	١٨	$\lim_{\text{س} \to -١} \frac{٣\text{س}^{٢} - \text{س} - ٤}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٢}$

١٩) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ١٤}{٣\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ٤}$

٢٠) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^٢ + ٧\text{س} + ٥}{٣\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ١}$

٢١) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^٢ - ٧\text{س} - ٤}{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢}$

٢٢) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} - ٣}{\text{س} - ٣}$

٢٣) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{س}^٢ + \text{س} - ١٢}{\text{س}^٢ - ٩}\right)^٢$

٢٤) $\underset{\text{س}\to \frac{٢}{٣}}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٩\text{س}^٢ - ٤}{٣\text{س} - ٢}\right)^٢$

٢٥) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٣ - \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ٤}$

٢٦) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢ + ١}{\text{س}^٣ - ١}$

٢٧) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٣ - \text{س}^٢ - ٨\text{س} + ١٢}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}$

٢٨) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٣ - \text{س}^٢ - ٤\text{س} - ٤}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}$

٢٩) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٣ + \text{س} - ١٠}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤}$

٣٠) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٣ + ٤\text{س}^٢ - \text{س} - ٤}{\text{س}^٤ - ١}$

٣١) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - ٥}{\sqrt{\text{س} - ٤} - ١}$

٣٢) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١٧} - ٤}{\text{س} + ١}$

٣٣) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٢٥} - ٥}$

٣٤) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{١ + \text{س}} - \sqrt{١ - \text{س}}}{٢\text{س}}$

٣٥) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ - \text{س} + ٢} - ٢}{\sqrt[٣]{\text{س}^٣ + ١}}$

٣٦) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٢}{\sqrt{٧ - \text{س}} - ٢}$

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

نظرية ٤ : نهاية دالة (بالقانون)

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن} \times \text{أ}^{\text{ن}-١}$$ لكل: $\text{ن} \in \text{ح} - \{ ٠ \}$

نتيجة:

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \text{ن} \times \text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}$$ لكل: $\text{ن} ، \text{م} \in \text{ح} - \{ ٠ \}$

مثال١ : $\text{نهـا}_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٥} + ٣٢}{\text{س} + ٢} = \frac{٣٢ + ٣٢}{٢ + ٢} = ١٦$ " معرفة "

مثال٢ : $\text{نهـا}_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٤} + ٨١}{\text{س} - ٣} = \frac{٨١ + ٨١}{٣ - ٣} = \frac{١٦٢}{\text{صفر}}$ كمية غير معرفة

مثال٣ : $\text{نهـا}_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٧} - ١٢٨}{\text{س} - ٢}$

الحل

بالتعويض نجد أن : $\text{د} (٢) = \frac{١٢٨ - ١٢٨}{٢ - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

$\therefore$ المقدار $= \text{نهـا}_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٧} - ٢^{٧}}{\text{س} - ٢} = ٧ \times ٢^{٧-١} = ٥ \times ٢^{٦} = ٣٢٠$

مثال٤ : $\text{نهـا}_{\text{س} \to -٤} \frac{\text{س}^{٣} + ٦٤}{\text{س} + ٤}$

الحل

بالتعويض نجد أن : $\text{د} (-٤) = \frac{-٦٤ + ٦٤}{-٤ + ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

$\therefore$ المقدار $= \text{نهـا}_{\text{س} \to -٤} \frac{\text{س}^{٣} - (-٤)^{٣}}{\text{س} - (-٤)}$

$= ٣ \times (-٤)^{٣-١} = ٣ \times (-٤)^{٢} = ٤٨$

مثـال ٥ : $\underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{س - ٥}$

الحـــل

بالتعويض نجد أن : $د\left(\sqrt{٥}\right) = \dfrac{(\sqrt{٥})^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{\sqrt{٥} - \sqrt{٥}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية فير معينة

$\therefore$ المقدار $= \underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٧} - (\sqrt{٥})^{٧}}{س - (\sqrt{٥})} = ٧ \times (\sqrt{٥})^{٦} = ٧ \times ٥^{٣} = ٨٧٥$

مثـال ٦ : $\underset{س \to -\frac{٣}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٣٢ س^{٥} + ٢٣٤}{٤ س - ٩}$

الحـــل

بالتعويض نجد أن : $د\left(-\frac{٣}{٢}\right) = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

عندما : $س \to -\frac{٣}{٢}$ فإن : $٢ س \to -٣$

$\therefore$ المقدار $= \underset{٢س \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢ س)^{٥} - (-٣)^{٥}}{(٢ س)^{٢} - (-٣)^{٢}} = \frac{٥}{٢} \times (-٣)^{٣} \frac{-١٣٥}{٢}$

مثـال ٧ : $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{س}$

الحـــل

بالتعويض نجد أن : $د(٠) = \dfrac{(٠ + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{٠} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

بإضافة : $(+٥ ، -٥)$ للمقام

، وعندما : $س \to ٠$ فإن : $(س + ٥) \to ٥$

$\therefore$ المقدار $= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٥)^{٤} - (٥)^{٤}}{(س + ٥) - ٥}$

$= \underset{س+٥ \to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٥)^{٤} - (٥)^{٤}}{(س + ٥) - ٥} = ٤ \times ٥^{٣} = ٥٠٠$

مثـال٨ : $\lim\limits_{\text{س} \to ٦} \dfrac{(\text{س} - ٥)^{٧} - ١}{\text{س} - ٦}$

الحـــــل

بالتعويض نجد أن : د (٦) = $\dfrac{(٦ - ٥)^{٧} - ١}{٦ - ٦} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

بوضع: (−) = (٦) = (− ٥ − ١) بالمقام ، وعندما : س ← ٦ فإن : (س − ٥) ← ١

∴ المقدار = $\lim\limits_{\text{س} \to ٦} \dfrac{(\text{س} - ٥)^{٧} - (١)^{٧}}{(\text{س} - ٥) - ١}$

= $\lim\limits_{\text{س} - ٥ \to ١} \dfrac{(\text{س} - ٥)^{٧} - (١)^{٧}}{(\text{س} - ٥) - ١} = ٧ \times ١^{٦} = ٧$

مثـال٩ : $\lim\limits_{\text{و} \to ٠} \dfrac{(\text{س} + ٥\text{و})^{٧} - \text{س}^{٧}}{٣\text{و}}$

الحـــــل

بالتعويض نجد أن : د (٠) = $\dfrac{(\text{س} + ٥ \times ٠)^{٧} - \text{س}^{٧}}{٣ \times ٠} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × $\frac{٥}{٣}$ ، إضافة (+ س ، − س) بالمقام

، وعندما : و ← ٠ ⟸ ٥ و ← ٠ ∴ (س + ٥ و) ← س

∴ المقدار = $\lim\limits_{\text{و} \to ٠} \dfrac{\frac{٥}{٣}\left[(\text{س} + ٥\text{و})^{٧} - (\text{س})^{٧}\right]}{\frac{٥}{٣}(٣\text{و}) + \text{س} - \text{س}}$

= $\frac{٥}{٣} \lim\limits_{\text{س} + ٥\text{و} \to \text{س}} \dfrac{(\text{س} + ٥\text{و})^{٧} - (\text{س})^{٧}}{(\text{س} + ٥\text{و}) - \text{س}} = \frac{٥}{٣} \times ٧ \times \text{س}^{٦} = \frac{٣٥}{٣}\,\text{س}^{٦}$

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

تمـــارين

أكمـــــــل ما يأتى

(٢) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٩} - ١}{س^{٥} - ١} =$ ......

(٢) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩} =$ ....

(٣) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ١٦}{س^{٣} + ٨} =$ ....

(٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١)^{٩} - ١}{س} =$ ....

(٥) إذا كان : $\underset{س \to ك}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ك^{٥}}{س - ك} = ٨٠$ فإن : ك = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(٦) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س - ٢}$ (أ) ١٦ (ب) ٥×١٦ (ج) ٦٤ (د) ٣٢

(٧) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} + ١}{س + ١}$ (أ) ٥ (ب) ٤ (ج) −٥ (د) −٤

(٨) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + هـ)^{٧} - س^{٧}}{هـ}$ (أ) $س^{٧}$ (ب) $٧س^{٦}$ (ج) صفر (د) ١

(٩) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{١٣} - ١}{س^{١٩} - ١}$ (أ) $\frac{١٣}{١٩}$ (ب) $\frac{١٩}{١٣}$ (ج) −٦ (د) $١\frac{١٣}{١٩}$

أوجد كلاً مما يأتى :

١	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٢٤٣}{س - ٣}$	٢	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٦} - ٦٤}{س - ٢}$
٣	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} + ٣٢}{س + ٢}$	٤	$\underset{س \to -\sqrt{٣}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٧} - ٢٧\sqrt{٣}}{س + \sqrt{٣}}$

٥	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ١٦}{٢س - ٤}$	٦	$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٣ س^{٦} - ٣}{س - ١}$
٧	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٨١ س}{س - ٣}$	٨	$\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ١٦}{س^{٢} + ٢ س}$
٩	$\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٧} + ١٢٨}{س^{٣} + ٨}$	١٠	$\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ٨١}{س^{٣} + ٢٧}$
١١	$\underset{س \to \sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٤\sqrt{٢}}{س^{٢} - ٢}$	١٢	$\underset{س \to -\sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٢٥\sqrt{٥}}{س^{٢} - ٥}$
١٣	$\underset{س \to \frac{٣}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٣٢ س^{٥} - ٢٤٣}{٨ س^{٣} - ٢٧}$	١٤	$\underset{س \to -\frac{٥}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{١٦ س^{٤} - ٦٢٥}{٨س^{٣} + ١٢٥}$
١٥	$\underset{٢س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{١٦ س^{٤} - ١}{١٢٨ س^{٧} + ١}$	١٦	$\underset{٢س \to \sqrt{٣}}{\text{نهـا}} \frac{٨ س^{٣} - ٣\sqrt{٣}}{٢ س - \sqrt{٣}}$
١٧	$\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ١٢٨ س^{١٢}}{س^{٢} - ١٦ س^{٦}}$	١٨	$\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{١٦ س^{٤} - ١}{٢س - ١}$
١٩	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^{٤} - ١٦}{س}$	٢٠	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٣)^{٤} - ٨١}{س}$
٢١	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)^{٥} + ١}{س}$	٢٢	$\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^{٥} + ١}{س + ٣}$
٢٣	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١)^{٥} - ١}{س^{٢} + س}$	٢٤	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢)^{٦} - ١٦}{س^{٢} - ٣ س}$

٢٥	$\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{(س-٣)^{٦}-١}{س-٤}$	٢٦	$\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \frac{(س+٢)^{٥}+١}{س+٣}$
٢٧	$\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{(س+٢)^{٦}-١}{(س+٢)^{٣}-١}$	٢٨	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١+٣س)^{٧}-١}{٤س}$
٢٩	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٢س+١)^{٥}-١}{٥س}$	٣٠	$\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س+٥هـ)^{٩}-س^{٩}}{٦هـ}$
٣١	$\underset{و \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س+٤و)^{٦}-س^{٦}}{و}$	٣٢	$\underset{و \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س+٣و)^{٨}-س^{٨}}{٤و}$
٣٣	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س-٣)^{٩}-١}{س-٢}$	٣٤	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س^{٢}-٣)^{٧}-١}{س-٢}$
٣٥	$\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \frac{(س+١)^{٣}+٨}{س^{٢}-س-١٢}$	٣٦	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٧}+س^{٥}-١٦٠}{س-٢}$
٣٧	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س-٢)^{٥}+س-٤}{٣س-٩}$	٣٨	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{١٦س^{-٤}-١}{س-٢}$
٣٩	$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٧]{س}-١}{\sqrt[٤]{س}-١}$	٤٠	$\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣}\sqrt{س}-١٢٨}{س-٤}$
٤١	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{س+٦}-٢}{س-٢}$	٤٢	$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{س+٢٦}-٣}{س-١}$
٤٣	$\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{س-٤}{\sqrt{س}-٢}$	٤٤	$\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{س-\sqrt{٣}}{س-٩}$

٤٥) $\lim\limits_{س \to ١} \left(\frac{س - ١}{\sqrt{س + ٣} - ٢} \times \frac{س^٦ - ١}{س^٣ - ١} \right)$

٤٦) $\lim\limits_{س \to -١} \left(\frac{س + ١}{\sqrt{٣ - س} - ٢} - \frac{س^{١٠} - س}{س^{١٣} - س} \right)$

٤٧) $\lim\limits_{س \to ٢} \left(\frac{١}{س^٤ - ١٦} \times \frac{(س^٥ - ٣٢)^٣}{(س - ٢)^٢} \right)$

٤٨) $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س \sqrt{س - ٣} - ٤}{س - ٤}$

٤٩) إذا كانت : $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٢ + (م - ١) س - م}{س - ١} = ٤$ أوجد قيمة : م

٥٠) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٥ - ٤ س & ، س > ٠ \\ ٢ س^٢ - ١ & ، س < ٠ \end{cases}$

أوجد : $\lim\limits_{س \to -٢}$ د (س) ، $\lim\limits_{س \to ٥}$ د (س)

٥١) إذا كانت : $\lim\limits_{س \to م} \frac{س^٨ - م^٨}{س^٦ - م^٦} = ١٢$ أوجد قيمة : م

٥٢) إذا كانت : د (س) = س^٤ أوجد : $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{د (س) - د (٣)}{س - ٣}$

نهاية الدالة عند اللانهاية

إذا كانت د (س) تقترب من قيمة حقيقية معينة (ل مثلاً) عندما تقترب س من اللانهاية فإننا نقول أن الدالة لها نهاية

ونعبر عن ذلك رمزياً بالصورة نهـــــا د (س) = ل
س ← ∞

نظرية (١) : نهـــــا $\frac{١}{س}$ = صفر
س ← ∞

نتيجة (١) : نهـــــا $\frac{ا}{س}$ = صفر حيث : ا ∈ ح- { ٠ }
س ← ∞

نتيجة (٢) : نهـــــا $\frac{ا}{س^{ن}}$ = صفر حيث : ا ∈ ح- { ٠ } ، ن ∈ $ح^{+}$
س ← ∞

تستخدم النظرية ونتائجها فى إيجاد نهـــــا د (س) حينما
س ← ∞

(١) تكون الدالة د على شكل كسر جبرى

(٢) كان التعويض المباشر يعطى $\frac{\infty}{\infty}$ أ، ∞ ــ ∞

وذلك بأن نقسم كلاً من البسط والمقام على (س) مرفوعاً لأعلى قوة ^{أس} فى مقام الكسر

، أما إذا أعطى (∞ – ∞) فنضرب فى المرافق أولاً

ثم نقسم كلاً من البسط والمقام على المتغير (س) مرفوعاً لأعلى قوة (أس) فى المقام

أمثلة : أوجد كلاً مما يلى :

مثـال١ : $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ س^٢ - ٣ س}{س^٢ - ٢}$

الحـــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

∴ المقدار = $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ - \frac{٣}{س}}{١ - \frac{٢}{س^٢}} = \frac{٥ - ٠}{١ - ٠} = ٥$

مثـال٢ : $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ س^٣ - ٣ س + ٦}{٣ س - ٧ س^٣}$

الحـــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

∴ المقدار = $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ - \frac{٣}{س^٢} + \frac{٦}{س^٣}}{\frac{٣}{س^٢} - ٧} = \frac{٥ - ٠ + ٠}{٠ - ٧} = -\frac{٥}{٧}$

مثـال٣ : $\lim_{س \to \infty} \frac{٣ س^٢ + ٦}{٢ س - ٧ س^٣}$

الحـــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

∴ المقدار = $\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٣}{س} + \frac{٦}{س^٣}}{\frac{٢}{س^٢} - ٧} = \frac{٠ + ٠}{٠ - ٧} =$ صفر

مثـــال ٤ : نهـــــا $_{س \leftarrow \infty}$ $\frac{٩ س^٣ - ٢ س + ٥}{٢ س - س^٢}$

الحـــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

∴ المقدار = نهـــا $_{س \leftarrow \infty}$ $\frac{٩ س - \frac{٢}{س} + \frac{٥}{س^٢}}{\frac{٢}{س} - ١}$ = $\frac{٩ \times \infty - ٠ + ٠}{٠ - ١}$ = $\frac{\infty}{١}$

∴ ليس للدالة نهاية (اكبر أس فى المقام)

مثـــال ٥ : نهـــــا $_{س \leftarrow \infty}$ $\frac{(س - ٢) (٣س^٢ + ١)}{(٤س + ٣) (٥ س^٢ - ١)}$

الحـــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$ = س × $س^٢$ = $س^٢$ × س

∴ المقدار = نهـــا $_{س \leftarrow \infty}$ $\frac{(١ - \frac{٢}{س})(٣ + \frac{١}{س^٢})}{(٤ + \frac{٣}{س}) (٥ - \frac{١}{س^٢})}$ = $\frac{(١ - ٠)(٣ + ٠)}{(٤ + ٠) (٥ - ٠)}$ = $\frac{٣}{٢٠}$

مثـــال ٦ : نهـــــا $_{س \leftarrow \infty}$ $\frac{\sqrt[٣]{٨س^٣ + ١}}{\sqrt{٩س^٢ - ٥}}$

الحـــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على س = $\sqrt{س^٢}$ = $\sqrt[٣]{س^٣}$

∴ المقدار = نهـــا $_{س \leftarrow \infty}$ $\frac{\sqrt[٣]{٨ + س^{-٣}}}{\sqrt{٩ - ٥س^{-٢}}}$ = $\frac{\sqrt[٣]{٨ + ٠}}{\sqrt{٩ - ٠}}$ = $\frac{٢}{٣}$

مثـ٧ـال : $\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2 + س} - \sqrt{س^2 - ١} \right)$

الحـــــــــل

∴ د (∞) = ∞ − ∞ = كمية غير معنة

بالضرب بسطاً ومقاماً × المرافق نجد :

$$∵ د(س) = \left(\sqrt{س^2+س} - \sqrt{س^2-١} \right) \times \frac{\left(\sqrt{س^2+س} + \sqrt{س^2-١} \right)}{\left(\sqrt{س^2+س} + \sqrt{س^2-١} \right)}$$

$$∴ \lim_{س \to \infty} \frac{س^2 + س - (س^2 + ١)}{\left(\sqrt{س^2+س} + \sqrt{س^2-١} \right)}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{(س - ١)}{\left(\sqrt{س^2+س} + \sqrt{س^2-١} \right)}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^2}$

$$∴ \lim_{س \to \infty} \frac{١ - س^{-١}}{\sqrt{١ - س^{-١}} + \sqrt{١ + س^{-٢}}} = \frac{١ - ٠}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$$

تمـــارين

أكمـــــــل ما يأتى

(١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س} = ...$

(٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س - ٥}} = ...$

(٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٥} + ٥ س^{٢}}{٣ س^{٥} + س^{٢} + ٨} = ...$

(٤) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٧}{س} + ٣ \right) = ...$

(٥) $\lim_{س \to \infty} \left(٣ س^{-٢} + ٧س^{-١} - ٥ \right) = ...$

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ (أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٠ (د) ∞

(٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} + ٢}$ (أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٠ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٣) $\lim_{ه \to \infty} \frac{(س + ١)(٢س + ٣)}{٣س^{٢} + ٧س}$ (أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) صفر (د) $\frac{٢}{٧}$

(٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨س^{٣} - ٧}}{\sqrt{٩س^{٢} + ٣}}$ (أ) $\frac{٨}{٩}$ (ب) $\frac{-٧}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{١٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

أوجد كلاً مما يأتى :

١	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤ س^{٢} - ٣}{٥ س^{٢} - ١}$	٢	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ س^{٢} + ٤}{٢ - س^{٢}}$
٣	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ س^{٢} - ٣ س + ١}{٢ س^{٢} + س - ٥}$	٤	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ س^{٢} + ٢ س + ١}{٢ - ٦ س - س^{٢}}$
٥	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢ س^{٤} - س^{٣} - ٤ س}{٣ س^{٥} - س^{٢} + ٧}$	٦	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ س^{٣} - ٢}{٤ - ٣ س^{٢}}$
٧	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ س^{٣} - ٢ س^{٢} - ٣}{٣ س^{٤} - س + ٧}$	٨	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} + ٣ س - ١}{٦ س^{٣} - س^{٢} + ٧}$
٩	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤ س^{٣} + ٥ س^{٢} - ٤}{(٣ س + ١)(٢ س^{٢} - ١)}$	١٠	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٧ س - ١)(س^{٢} + ٥)}{(س + ٤)(٢ س^{٢} - س)}$
١١	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} (س - ١)}{س (س^{٢} + ٥ س - ٢)}$	١٢	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٢ س + ٥)(س - ١)(س + ٣)}{س (س - ٤)(٣ س + ١)}$
١٣	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س - ١}{\sqrt{٤ س^{٢} + ٧}}$	١٤	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٩ س^{٢} - س - ١}}{٢ س + ٣}$
١٥	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{٢٧ س^{٣} - ٥ س + ٤}}{٤ س^{٢} - ٣}$	١٦	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢٥ س^{٢} - ٦}}{\sqrt[٣]{٨ س^{٣} - س}}$
١٧	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{س^{٣} - ٣ س + ١}}{\sqrt[٤]{١٦ س^{٤} - ٥}}$	١٨	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٧]{س^{٧} - س^{٥} + س}}{\sqrt[٥]{س^{٥} - ٣ س}}$

١٩	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[3]{٨س^٢ - ٣س - ٥}}{\sqrt[6]{س٤ - ٥}}$	٢٠	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + ٢} + \sqrt{س + ٥}}{\sqrt{٢س + ٩}}$
٢١	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س\sqrt{س^٤ - ٢} + \sqrt{س^٢ + ٢}}{س^٣ - ١}$	٢٢	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[3]{٨ - ٢٧س^٦}}{س \quad ٤س^٢ - ٧}$
٢٣	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٢س^٣ + ١)^٢ + ٦س^٦}{(٣س^٣ - ١)^٣ - ٧س^٦}$	٢٤	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢س^٢}{س + ١} - (٢س - ٣)\right)$
٢٥	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^٢ + س} - \sqrt{س^٢ - س}\right)$	٢٦	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left[\sqrt{س^٢ + ٢} - \sqrt{س^٢ - ١}\right]$
٢٧	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^٢ + ٣س} - \sqrt{س^٢ - ١}\right)$	٢٨	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^٢ - س} - \sqrt{٤س^٢ + س}\right)$
٢٩	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^٢ + س - ١} - س\right)$	٣٠	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^٢ - ٣س + ٤} - س\right)$
٣١	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣س^{-٣} + ٢س^{-١} + ١}{س^{-٤} - ٥س^{-٥} + ٢}$	٣٢	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥س^{-٤} + ٣س^{-٢} - ٤}{س^{-٥} - ٦س^{-٣} - ٢}$
٣٣	أوجد قيمة ك إذا كان : ـ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[3]{كس^٣ + ٣س}}{\sqrt{٤س^٢ + ٦}} = -١$	٣٤	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ \times ٥^س + ٢ \times ٧^س}{٩ \times ٧^س - ٦ \times ٤^س}$

٣٥) إذا كانت : $د(س) = \frac{أس^٢ - ٣}{س^٢ - ب س - ٥}$ وكانت $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} د(س) = ٤$

، $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} د(س) = ٣$ أوجد قيمة كل من : أ ، ب

نهاية الدوال المثلثية

حقائق هامة :

كلاً من : حا س ، حتا س معرفة لجميع قيم س ∈ ح أما طا س معرفة لجميع قيم س ∈ ح ماعدا عند س = $\frac{٢ن+١}{٢}$ ط ، ن ∈ ص فمثلا : طا $\frac{\pi}{٢}$ غير معرف

(١) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ حا س = أ ، أ ∈ ح

(٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ حتا س = أ ، أ ∈ ح

(٣) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ طا س = أ ، أ ≠ $\frac{٢ن+١}{٢}\pi$ ، ن ∈ ص

نظرية : $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا س}}{\text{س}} = ١$ (حيث س مقاسة بالتقدير الدائرى)

نتيجة (١) : $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا س}}{\text{س}} = ١$ (حيث س مقاسة بالتقدير الدائرى)

نتيجة (٢) : $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ (حيث س مقاسة بالتقدير الدائرى)

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ (حيث س مقاسة بالتقدير الدائرى)

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{جا أ س}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا أ س}}{\text{س}}} = \frac{١}{\text{أ}}$$

نتيجة (٣) : $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}^٢\text{ س}}{\text{س}^٢} = ١$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا أ س}^٢}{\text{س}^٢} = \text{أ}$

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}^٢\text{ أ س}}{\text{س}^٢} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{حا أ س}}{\text{س}}\right)^٢ = \text{أ}^٢$$

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

مثـال١ : (أ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٥ \text{ س}}{\text{س}} = ٥$ (ب) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا } ٢ \text{ س}}{\text{س}} = ٢$

مثـال٢ : (أ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا } ٥ \text{ س}}{٤ \text{ س}} = \frac{٥}{٤}$

(ب) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} \frac{٢}{٣} \text{س}}{٦ \text{ س}} = \frac{٢}{٣} \div ٦ = ٤$

مثـال٣ : : (أ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٣ \text{ س}^٢}{\text{س}^٢} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٣ \text{ س}^٢}{\text{س}^٢} = ٣$

(ب) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}^٢ ٥ \text{ س}}{\text{س}^٢} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{ظا } ٥ \text{ س}}{\text{س}}\right)^٢ = ٢٥$

مثـال٤ : $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}^٢ ٤ \text{ س}}{\text{س}^٢} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{جا} ٤ \text{س}}{\text{س}}\right)^٢ = ٤^٢ = ١٦$

مثـال٥ : $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٥ \text{ س}}{٣ \text{ ظا } ٤ \text{ س}}$

الحـــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على س ينتج

$= \frac{١}{٣} \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٥ \text{ س}}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{ظا } ٤ \text{ س}} = \frac{١}{٣} \times \frac{٥}{٤} = \frac{٥}{١٢}$

مثـال٦ : $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٧ \text{ س} + \text{حا } ٣ \text{ س}}{٣ \text{ س} - \text{ظا س}}$

الحـــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على س ينتج

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٧\text{س}}{\text{س}} + \frac{\text{جا}٣\text{س}}{\text{س}}}{\frac{٣\text{س}}{\text{س}} + \frac{\text{ظا س}}{\text{س}}} = \frac{٧ + ٣}{٣ - ١} = ٥$

مثـــال ٧ : نهـــــا (س ← ٠) $\frac{٦ س^٢ + ٣ حا^٢ ٢ س}{٥ س^٢ - طا ٣ س^٢}$

الحــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$= \text{نهــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\frac{٦ س^٢}{س^٢} + ٣ \left(\frac{\text{جا} ٢ س}{س}\right)^٢}{\frac{٥ س^٢}{س^٢} - \frac{\text{طا} ٣ س^٢}{س^٢}} = \frac{٦ + ٣ \times ٤}{٥ - ٣} = ٩$

مثـــال ٨ : نهـــــا (س ← ٣) $\frac{\text{حا} (٥ س - ١٥)}{س - ٣}$

الحــــــــل

∵ س ← ٣ ∴ (س - ٣) ← ٠

$= \text{نهــا}_{س - ٣ \leftarrow ٠} \frac{\text{حا} ٥ (س - ٣)}{س - ٣} = ٥$

مثـــال ٩ : نهـــــا (س ← $\frac{\pi}{٣}$) $\frac{\text{طا} (٩ س - ٣ \pi)}{٣ س - \pi}$

الحــــــــل

∵ س ← $\frac{\pi}{٣}$ ∴ س - $\frac{\pi}{٣}$ ← ٠ ∴ ٣ س - π ← ٠

$= \text{نهــا}_{٣ س - \pi \leftarrow ٠} \frac{\text{طا} ٣ (٣ س - \pi)}{(٣ س - \pi)} = ٣$

مثـــال ١٠ : نهـــــا (س ← $\frac{\pi}{٤}$) $\frac{\text{جا} (٢ س - \frac{١}{٢} \pi)}{\text{طا} (٤ س - \pi)}$

الحــــــــل

∵ س ← $\frac{\pi}{٤}$ ∴ س - $\frac{\pi}{٤}$ ← ٠ ∴ ٤ س - π ← ٠

$= \text{نهــا}_{٤ س - \pi \leftarrow ٠} \frac{\text{جا} \frac{١}{٢} (٤ س - \pi)}{٤ س - \pi} \times \frac{٤ س - \pi}{\text{طا} (٤ س - \pi)} = \frac{١}{٢} \times ١ = \frac{١}{٢}$

مثـــال ١١ : $\lim_{٢س \to \pi} \frac{\text{جتا س}}{\text{ظا}(٢س - \pi)}$

الحـــــــــــل

∵ ٢س ← π ∴ س ← $\frac{\pi}{٢}$ ∴ س − $\frac{\pi}{٢}$ ← ٠

$= \lim_{س - \frac{\pi}{٢} \to ٠} \frac{-\text{جا}(س - \frac{\pi}{٢})}{\text{ظا }٢(س - \frac{\pi}{٢})} = \frac{١}{٢} \times \frac{-\text{جا}(س - \frac{\pi}{٢})}{(س - \frac{\pi}{٢})} \times \frac{(س - \frac{\pi}{٢})}{\text{ظا}(س - \frac{\pi}{٢})} = -\frac{١}{٢}$

مثـــال ١٢ : $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - \text{جا س}}{(\frac{\pi}{٢} - س)^٢}$

الحـــــــــــل

بوضع ص = $\frac{\pi}{٢}$ − س ∴ س = $\frac{\pi}{٢}$ − ص

وعندما س ← $\frac{\pi}{٢}$ ∴ ص ← ٠

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - \text{جا س}}{(\frac{\pi}{٢} - س)^٢} = \lim_{ص \to ٠} \frac{١ - \text{جا}(\frac{\pi}{٢} - ص)}{(ص)^٢}$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{١ - \text{جتا ص}}{(ص)^٢}$

وبوضع د (ص) $= \frac{١ - \text{جتا ص}}{(ص)^٢} \times \frac{١ + \text{جتا ص}}{١ + \text{جتا ص}} = \frac{١ - \text{جتا}^٢ \text{ص}}{ص^٢ (١ + \text{جتا ص})}$

$= \frac{\text{جا}^٢ \text{ص}}{ص^٢ (١ + \text{جتا ص})} = (\frac{\text{جا ص}}{ص})^٢ \times \frac{١}{(١ + \text{جتا ص})}$

∴ $\lim_{ص \to ٠}$ د (ص) $= \lim_{ص \to ٠} (\frac{\text{جا ص}}{ص})^٢ \times \lim_{ص \to ٠} \frac{١}{(١ + \text{جتا ص})}$

$= (١)^٢ \times \frac{١}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$

تمـــارين

أكمـــــل ما يأتى

(١) نهـــا (س ← ٠) جتا ٣ س = ...

(٢) نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{جا}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}$ = ...

(٣) نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{٤ + ٥ س}}{\text{جتا ٣س}}$ = ...

(٤) نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ ٦س}}{\text{٥س}^{٢}}$ = ...

(٥) نهـــا (س ← ٠) (٣ س قتا ٢س) = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{٢س + جا ٣س}}{\text{ظا ٥س}}$ (أ) ٥ (ب) $\frac{٦}{٥}$ (جـ) ١ (د) صفر

(٢) نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{جتا٣س جا ٢س}}{\text{٦س}}$ (أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٠ (د) $\frac{١}{٣}$

(٣) نهـــا (هـ ← π) $\frac{\text{جا هـ}}{\pi - \text{هـ}}$ (أ) $\pi^{٢}$ (ب) π (جـ) – π (د) ١

(٤) نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{١ ـ ظا س}}{\text{جا س ـ جتا س}}$ (أ) ١ (ب) ـ١ (جـ) ٠ (د) غير معرف

أوجد كلاً مما يأتى :

١) نهـا (س ← ٠) ‏(حا ٤ س) / (٥ س)

٢) نهـا (س ← ٠) ‏(٦ س) / (طا ٢ س)

٣) نهـا (س ← ٠) ‏(حا ٥ س^{٢}) / (٢ س^{٢})

٤) نهـا (س ← ٠) ‏(٣ طا^{٢} ٢ س) / (٤ س^{٢})

٥) نهـا (س ← ٠) ‏(حا ٦ س) / (طا ٥ س)

٦) نهـا (س ← ٠) ‏(حا^{٢} ٢ س) / (طا٣ س^{٢})

٧) نهـا (س ← ٢) ‏(حا (٢ س − ٤)) / (س − ٢)

٨) نهـا (س ← ٣) ‏(طا (٢ س − ٦)) / (٣ س − ٩)

٩) نهـا (س ← ٠) ‏(حا ٢ س + طا ٣ س) / (٥ س)

١٠) نهـا (س ← ٠) ‏(حا ٣ س) / (٥ س حتا س)

١١) نهـا (س ← ٠) ‏(حا ٤ س − ٣ طا ٢ س) / (٥ س حتا ٥ س)

١٢) نهـا (س ← ٠) ‏(٦س − حا ٢ س) / (٨ س + حا٢س)

١٣) نهـا (س ← ٠) ‏(٥س + ٢ حا ٣ س) / (٤ س − طا٢ س)

١٤) نهـا (س ← ٠) ‏(٣س^{٢} + ٥ حا ٣ س^{٢}) / (س^{٢} + طا س^{٢})

١٥) نهـا (س ← ٠) ‏(٤ حا^{٢} ٢س − ٣ س^{٢}) / (٦ س^{٢} + طا٥س^{٢})

١٦) نهـا (س ← ٠) ‏(س^{٢}حتا٣س + طا^{٢} ٣س) / (٣س^{٢} − حا٢س)

١٧) نهـا (س ← ٠) ‏(حا^{٢} ٢س^{٢} + ٣ س^{٢}) / (٦ س^{٤} حتا ٣س)

١٨) نهـا (س ← ٠) ‏(٣س حا^{٢} ٢س) / (٥ س^{٣} − طا٣س^{٣})

١٩	$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا ٣س طا٢س}}{\text{٢ س}^{٢} \text{ حتا٢س}}$	٢٠	$\lim_{\text{س} \to ٠} \text{س حا } \frac{١}{\text{س}}$
٢١	$\lim_{\text{س} \to ٠} [\text{ س (قتا س + طتا س) }]$	٢٢	$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا}^{٢}\text{ س}}{\text{س طا٢س}}$
٢٣	$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا } \frac{١}{٢} \text{ س}}{\text{٢ س}}$	٢٤	$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{٤ س حتا٢س}}{\text{(١ + ٢س) طا٤س}}$
٢٥	$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا ٣س طا ٢ س}}{\text{٢ س}^{٢} \text{ حتا ٢ س}}$	٢٦	$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{٢ س}^{٣} + \text{حا٢ س}^{٣}}{\text{س}^{٤} - \text{طا}^{٣} \text{ ٢ س}}$
٢٧	$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س حا س}}{\text{٣ س}^{٢} - \text{طا}^{٢}\text{ س}}$	٢٨	$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{حتا}^{٢} \text{ ٣س}}{\text{٤س}^{٢}}$
٢٩	$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا (٨ س – ٢ ط)}}{\text{طا (٤ س – ط)}}$	٣٠	$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{طا (٩ س – ٦ ط)}}{\text{جا (٣ س – ط)}}$

نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

نظرية :

الدالة د (س) تؤول للنهاية ل عندما س ← أ إذا و فقط إذا كانت نهايتها اليمنى و اليسرى عند أ موجودتين و كل منهما تساوى ل

أى أن : نهـــا د (س) = ل (س ← ٠) إذا و فقط إذا كان : د (أ⁺) = د (أ⁻) = ل

ملاحظات :

❖ إذا كان : د (أ⁺) = د (أ⁻) = ل فإن : نهـــا د (س) = ل (س ← ٠)

و بالعكس إذا كان : نهـــا د (س) = ل (س ← ٠) فإن : د (أ⁺) = د (أ⁻) = ل

❖ عند إيجاد نهاية دالة عندما س ← أ يراعى الآتى :

- إذا كانت قاعدة الدالة مختلفة على يمين و يسار أ مباشرة يجب بحث كل من النهاية اليمنى و النهاية اليسرى للدالة ثم مقارنة النهايتين " إن وجدتا "

أما إذا كانت قاعدة الدالة واحدة على يمين و يسار أ مباشرة فيمكن بحث نهاية الدالـــــة مباشرة دون بحث النهاية و النهاية اليسرى

➢ إذا كان : د (أ⁺) ≠ د (أ⁻) فإن : نهـــا د (س) (س ← ٠) ليست موجودة

➢ إذا كانت الدالة د معرفة على [أ ، ب [أو] أ ، ب] فلبحث نهاية الدالة عند أ نبحث النهاية اليمنى فقط و إن وجدت تكون هى نهاية الدالة عند أ و لبحث نهاية الدالة عند ب نبحث النهاية اليسرى فقط و إن وجدت تكون هى نهاية الدالة عند ب

مثـــ١ـال: إذا كانت : د (س) = { ٣س + ١ عندما س < ١ ، ٥ − س عندما س > ١ } أوجد كلاً من :

(أ) نهـــا د (س) (س ← ٠) (ب) نهـــا د (س) (س ← ٣) (جـ) نهـــا د (س) (س ← ١)

الحـــــــل

Ⓐ ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين و يسار س = ٠ و هى : د (س) = ٣س + ١

∴ $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = $\lim_{س \to ٠}$ (٣س + ١) = ٣ × ٠ + ١ = ١

Ⓑ ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين و يسار س = ٣ و هى : د (س) = ٥ ـ س

∴ $\lim_{س \to ٣}$ د (س) = $\lim_{س \to ٣}$ (٥ ـ س) = ٥ ـ ٣ = ٢

Ⓒ ∵ قاعدة الدالة على يسار ١ تختلف عن قاعدتها على يمين ١

∴ يجب بحث كلاً من النهاية اليمنى و النهاية اليسرى عند س = ١

∵ د (١^-) = $\lim_{س \to ١^-}$ (٣س + ١) = ٣ × ١ + ١ = ٤

، د (١^+) = $\lim_{س \to ١^+}$ (٥ ـ س) = ٥ ـ ١ = ٤

∵ د (١^-) = د (١^+) = ٤ ∴ $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ٤

مثـــ٢ــال: إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{(س + ٣)^٢ - ٩}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ س + ٦ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

الحـــــــل

∵ د (٠^-) = $\lim_{س \to ٠^-}$ د (س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ $\dfrac{(س + ٣)^٢ - ٩}{س}$

= $\lim_{س \to ٠^-}$ $\dfrac{(س + ٣ - ٣)(س + ٣ + ٣)}{س}$ = ٦

، د (٠^+) = $\lim_{س \to ٠^+}$ د (س) = $\lim_{س \to ٠^+}$ (س + ٦) = ٠ + ٦ = ٦

∵ د (٠^-) = د (٠^+) = ٦ ∴ $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ٦

مثـــ٣ــال: إذا كانت : د (س) = { حا ٣ س / س عندما س < ٠ ، حتا ٣ س عندما س > ٠ } أوجد نهـــا د (س) س ← ٠

الحـــــل

∵ د (٠⁻) = نهـــا (س ← ٠⁻) حا ٣ س / س = ٣

، د (٠⁺) = نهـــا (س ← ٠⁺) حتا ٣ س = ١

∵ د (٠⁺) ≠ د (٠⁻) ∴ نهـــا (س ← ٠) د (س) ليس لها وجود

مثـــ٤ــال: إذا كانت : د (س) = { (ﻡ س^٢ + ٢ س − ٥) / (س − ١) عندما س < ١ ، ٣ س + ٥ عندما س > ١ }

لها نهاية عند س = ١ أوجد قيمة كل من ﻡ

الحـــــل

∵ د (س) لها نهاية عند س = ١ ∴ د (١⁻) = د (١⁺)

∴ نهـــا (س ← ١⁻) (ﻡ س + ٥)(س − ١) / (س − ١) = نهـــا (ﻡ س + ٥)

∴ ﻡ + ٥ = ٨ ومنها : ﻡ = ٣

مثـــ٥ــال: د (س) = { س |س| ـ ١ عندما س < ١ ، س / |س| ـ ٢ عندما س > ١ } أوجد نهـــا د (س)

الحـــــل

∵ د(س) = { س × ـ س ـ ١ = ـ س^٢ ـ ١ عندما س < ١ ، س / س ـ ٢ = ١ ـ ٢ = ـ١ عندما س > ١ }

د (٠⁻) = نهـــا (س ← ٠⁻) (ـ س^٢ ـ ١) = ـ ١ ، د (٠⁺) = نهـــا (س ← ٠⁺) ـ١ = ـ١

∵ د (٠⁺) = د (٠⁻) = ـ١ ∴ نهـــا (س ← ٠) د (س) = ـ١

نهاية الدالة المعرفة على فترة عند أحد طرفيها

تعريف :

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة] ٢ ، ب [أو المغلقة [٢ ، ب]

(١) الدالة ليست معرفة على يسار النقطة ٢ فإننا نبحث النهاية اليمنة فقط د (٢⁺)

و تكون فى هذه الحالة نهـــا د (س) ، نهـــا د (س) غير متواجتان
س ← ٢⁺ ، س ← ٢

(٢) الدالة ليست معرفة على يمين النقطة ب فإننا نبحث النهاية اليمنة فقط د (ب⁻)

و تكون فى هذه الحالة نهـــا د (س) ، نهـــا د (س) غير متواجتان
س ← ب⁻ ، س ← ب

أى أن :

نهـــاية الدالة عند النقطة الطرفية غير موجودة ويكون للدالة عند هذه النقطة نهـــاية من جهة واحدة فقط [يمنى أ، يسرى]

مثـــال ١ : أبحث وجود نهاية للدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٥}$ عند : س ← ٥

الحـــل

د (س) معرفة على [٥ ، ∞ [

∴ الدالة د معرفة فقط على يمين س = ٥

، نهـــا (س ← ٥⁺) د (س) = نهـــا (س ← ٥⁺) $\sqrt{س - ٥}$ = صفر

∴ نهـــا (س ← ٥⁻) د (س) غير موجودة ، نهـــا (س ← ٥) د (س) غير موجودة

[لأن الدالة غير معرفة على يسار ٥]

مثـــال ٢ : إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{ظا ٤ س}}{\text{قتا ٩ س}} & ، -\frac{\pi}{9} < س < ٠ \\ \frac{1}{9}(٢^{٢} + ٢) & ، س > ٠ \end{cases}$

لها نهاية عند س = ٠ أوجد قيمة ٢ :

الحـــل

د (٠⁻) = نهـــا (س ← ٠⁻) $\frac{\text{ظا ٤ س}}{\text{جا ٩ س}}$ = $\frac{٤}{٩}$ ، د (٠⁺) = $\frac{١}{٩}$ (٢² + ٢)

∵ الدالة لها نهاية عند س = ٠ ∴ د (٠⁻) = د (٠⁺)

، $\frac{١}{٩}$ (٢² + ٢) = $\frac{٤}{٩}$ ∴ ٢² + ٢ = ٤ ⟸ ٢² = ٢ ∴ ٢ = ± $\sqrt{٢}$

تمـــــارين

(١) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ٥ + ٦ & \text{عندما } س < ٠ \\ ٦ - س & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ أوجد كلاً من :

Ⓐ $\lim_{س \to ١}$ د (س) Ⓑ $\lim_{س \to -١}$ د (س) Ⓒ $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

(٢) إذا كانت : د (س) = $س \, | س - ١ | + ٣$ أوجد كلاً من :

Ⓐ $\lim_{س \to -١}$ د (س) Ⓑ $\lim_{س \to ١}$ د (س) Ⓒ $\lim_{س \to ٣}$ د (س)

(٣) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ٣ س & -٢ < س < ٠ \\ س - ١ & ٠ < س < ٣ \end{cases}$ أوجد كلاً من :

Ⓐ $\lim_{س \to -٢}$ د (س) Ⓑ $\lim_{س \to ٣}$ د (س) Ⓒ $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

(٤) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٥ + ١}{س + ١} & ، -١ < س < ٠ \\ \dfrac{س \text{ حتا } س}{٥ س - ٤ \text{ حا } س} & ، ٠ < س < \dfrac{\pi}{٢} \end{cases}$ أوجد كلاً من :

Ⓐ $\lim_{س \to -١}$ د (س) Ⓑ د (س) Ⓒ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ د (س)

(٥) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{حا } (س - ١)}{س - ١} & ، س > ١ \\ \text{طا } \dfrac{\pi س}{٤} & ، س < ١ \end{cases}$ أوجد $\lim_{س \to ١}$ د (س)

(٦) إذا كان: للدالة د (س) = $\begin{cases} أ س^٢ - ب & ، س > ٢ \\ أ س + ب & ، س < ٢ \end{cases}$ لها نهاية تساوى ٣

عندما $س \to ٢$ أوجد قيمة كل من : أ ، ب

(٧) إذا كان: للدالة د (س) = $\begin{cases} ٣ س - ٢ & ، س < -١ \\ أ س + ب & ، -١ < س < ٣ \\ ٦ - س & ، س > ٣ \end{cases}$

لها نهاية عند كل من : س = −١ ، س = ٣ أوجد قيمة كل من : أ ، ب

إتصال دالة عند نقطة

تعريف :

إذا كانت الدالة د معرفة على فترة ما و كانت ٩ تنتمى لهذه الفترة فإن :

د تكون متصلة عند ٩ إذا و فقط إذا كانت $\lim_{س \to ٩}$ د (س) = د (٩)

شروط إتصال دالة عند نقطة :

تكون الدالة د متصلة عند س = ٩ إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية مجتمعة :

١ – الدالة معرفة عند س = ٩ أى أن : د (٩) لها وجود

٢ – $\lim_{س \to ٩}$ د (س) لها وجود

٣ – $\lim_{س \to ٩}$ د (س) = د (٩)

ملاحظة :

يكفى عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة لعدم إتصال الدالة د عند النقطة س = ٩ فمثلاً إذا كانت الدالة غير معرفة عند س = ٩ فهى بالتالى غير متصلة عند س = ٩ و لا داعى أن نبحث عن تحقق الشرطين الآخرين

مثـــ١ــال : ابحث إتصال الدالة : د (س) = | س – ١ | + ٣ عند س = ١

الحـــــل

$$د (س) = \begin{cases} س – ١ + ٣ &، س \geqslant ١ \\ –س + ١ + ٣ &، س < ١ \end{cases} = \begin{cases} س + ٢ &، س \geqslant ١ \\ ٤ – س &، س < ١ \end{cases}$$

∵ د (س) معرفة عند س = ١ حيث : د (١) = ١ + ٢ = ٣

، د (١^-) = $\lim_{س \to ١^-}$ (٤ – س) = ٣

، د (١^+) = $\lim_{س \to ١^+}$ (س + ٢) = ٣

أى أن : $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ٣

∴ د (١) = $\lim_{س \to ١}$ د (س) ∴ د متصلة عند س = ١

ملاحظة :

إذا كانت د (س) معرفة عند س = م ، $\lim_{س \leftarrow م}$ د (س) لها وجود ، كانت الدالة غير متصلة

عند س = م لإختلاف د (م) عن $\lim_{س \leftarrow م}$ د (س) فيمكن جعل الدالة متصلة عند س = م بإعادة تعريفها بجعل د (م) = $\lim_{س \leftarrow م}$ د (س)

مثـــ٢ـــال : إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{س + ٩} - ٣}{س} & ، س \neq ٠ \\ م & ، س = ٠ \end{cases}$

أوجد قيمة م التى تجعل د متصلة عند س = ٠

الحـــــل

∵ د (س) متصلة عند س = ٠ ∴ د (٠) = $\lim_{س \leftarrow ٠}$ د (س)

∴ م = $\lim_{س \leftarrow ٠} \dfrac{(\sqrt{س + ٩} - ٣)}{س}$ = $\lim_{س \leftarrow ٠} \dfrac{(\sqrt{س + ٩} - ٣)}{س} \times \dfrac{(\sqrt{س + ٩} + ٣)}{(\sqrt{س + ٩} + ٣)}$

= $\lim_{س \leftarrow ٠} \dfrac{س}{س (\sqrt{س + ٩} + ٣)}$ = $\dfrac{١}{٦}$

مثـــ٣ـــال: إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ٣ ، س = − ١ أوجد قيمة كل من : م ، ب حيث : د (س) = $\begin{cases} ٣ + س ١ & ، س \leqslant -١ \\ م س + ب & ، -١ < س < ٣ \\ س^٢ - ٣ & ، س \geqslant ٣ \end{cases}$

الحـــــل

∵ د (س) متصلة عند س = ٣ ∴ د (٣) = $\lim_{س \leftarrow ٣}$ د (س)

∴ د (٣) = د (٣^-) = د (٣^+) ∴ $(٣)^٢$ − ٣ = ٣ م + ب = ٣ - - (١)

∵ د (س) متصلة عند س = − ١ ∴ د (− ١) = $\lim_{س \leftarrow -١}$ د (س)

∴ د (− ١) = د (− ١^-) = د (− ١^+) ∴ −٣ + ١ = − م + ب = −٢ - - (٢)

من (١) ، (٢)

تمــــــارين

١ ـ أبحث إتصال الدوال الآتية عند النقط المبينة :

(١) $د(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 2س - 8}{س^2 - 16} & ، س < 4 \\ \frac{3}{4} & ، س \geqslant 4 \end{cases}$ عند س = ٤

(٢) $د(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & ، س \leqslant 2 \\ 3 & ، 2 < س < 5 \\ س - 2 & ، س \geqslant 5 \end{cases}$ عند س = ٢ ، س = ٥

(٣) $د(س) = \begin{cases} \frac{|س - 3|}{س - 3} & ، س \neq 3 \\ 2 & ، س = 3 \end{cases}$ عند س = ٣

(٤) $د(س) = \begin{cases} حا س + حتا س & ، س \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 2 + حتا 2 س & ، س > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ عند س = ٣

٢ ـ أوجد قيمة الثابت ﻫ التى تجعل د متصلة عند النقط المبينة

(١) $د(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - (ﻫ + 1)س + ﻫ}{س - 1} & ، س \neq 1 \\ 3س - 1 & ، س = 1 \end{cases}$ عند س = ١

(٢) $د(س) = \begin{cases} \frac{حا^2 2 س}{س طا 3 س} & ، س \neq 0 \\ ﻫ + 1 & ، س = 0 \end{cases}$ عند س = ٠

٣ ـ إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ـ ٢ ، س = ٥ أوجد

قيمة كل من : ﻫ ، ب حيث : $د(س) = \begin{cases} 3 - س^2 & ، س \leqslant -2 \\ ﻫ س + ب & ، -2 < س < 5 \\ س^2 - 12 & ، س \geqslant 5 \end{cases}$

٤ ـ إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ١ ، س = ٢ أوجد

قيمة كل من : ﻫ، ب حيث : $د(س) = \begin{cases} س - 2 & ، س \leqslant 1 \\ ﻫ س + ب & ، 1 < س < 2 \\ 6س + 2 & ، س \geqslant 2 \end{cases}$

منتدى توجيه الرياضيات أ/عادل إدوار

إتصال دالة على فترة

تعريف :

(١) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف = [؟ ، ب] فإن : الدالة د (س) تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفترة

(٢) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف = [؟ ، ب] فإن : الدالة د (س) تكون متصلة على ف إذا تحققت الشروط الآتية :

؟ ــ الدالة د متصلة على الفترة ف =] ؟ ، ب [

ب ــ الدالة د متصلة من اليمين عند ؟ أى : د ($؟^+$) = نهـــا د (س) حيث س ← ؟

حـ ــ الدالة د متصلة من اليمين عند ؟ أى : د ($؟^-$) = نهـــا د (س) حيث س ← ؟

ملاحظة :

الدالة د غير متصلة على الفترة ف =] ؟ ، ب [إذا وجدت نقطة واحدة على الأقل مثل حـ ∋ ف بحيث تكون د غير متصلة عندها أى إذا لم تتحقق إحدى الشروط :

؟ ــ الدالة د غير معرفة عند حـ

ب ــ عدم وجود نهاية للدالة د عند حـ

حـ ــ إختلاف نهاية الدالة د عند حـ عن د (حـ)

بعض أنماط الدوال المتصلة :

(١) دوال كثيرات الحدود : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

(٢) الدوال الكسرية الجبرية : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ما عدا عند أصفار دالة المقام

(٣) الدوال المثلثية :

* دالة الجيب : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

* دالة جيب التمام : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

* دالة الظل : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

ما عدا عند النقط $\frac{٢ن + ١}{٢}$ ط حيث ن ∋ ص

نظرية :

إذا كانت د$_1$ ، د$_2$ دالتين معرفتين على ف = [٢ ، ب] و كانتا متصلتين على الفترة ف فإن كلاً من الدوال الآتية تكون متصلة على الفترة ف :

(١) د$_1$ ± د$_2$ (٢) د$_1$ · د$_2$ (٣) $\frac{د_1}{د_2}$ بشرط د$_2$ ≠ ٠

مثـــال١ : أبحث إتصال الدالة د حيث د (س) = { ٣س + ١ ، – ٣ ≤ س < ٢ ؛ س^2 + ٣ ، ٢ ≤ س ≤ ٥ }

الحـــــــــل

د (س) معرفة على [– ٣ ، ٥]

(١) د (س) = ٣س + ١ لكل س ∈] – ٣ ، ٢ [

∵ د (س) كثرة حدود ∴ د (س) متصلة على] – ٣ ، ٢ [

(٢) د (س) = س^2 + ٣ لكل س ∈] ٢ ، ٥ [

∵ د (س) كثرة حدود ∴ د (س) متصلة على] ٢ ، ٥ [

(٣) د (٢) = ٤ + ٣ = ٧

، نهـــا$_{س ← ٢^-}$ (٣س + ١) = ٧ نهـــا$_{س ← ٢^+}$ (س^2 + ٣) = ٧

∴ نهـــا$_{س ← ٢}$ د (س) = د (٢) ∴ د (س) متصلة عند س = ٢

(٤) د (– ٣) = – ٨ ، نهـــا$_{س ← -٣^+}$ (٣س + ١) = – ٨

∴ د (س) متصلة من اليمين عند س = – ٣

، د (٥) = ٢٨ ، نهـــا$_{س ← ٥^-}$ (س^2 + ٣) = ٢٨

∴ د (س) متصلة من اليسار عند س = ٥

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) نستنتج أن د (س) متصلة على [– ٣ ، ٥]

مثـــ٢ـــال : إذا كانت الدالة د متصلة على ح أوجد قيمة كل من : ﻣ ، ب حيث : د (س) =

$$\begin{cases} ٣ \text{ س} - ٢ & ، \text{ س} \leqslant -٢ \\ ﻣ \text{ س} + \text{ب} & ، -٢ < \text{س} < ٥ \\ \text{س}^٢ - ١٢ & ، \text{ س} \geqslant ٥ \end{cases}$$

الحـــــــــل

∵ د متصلة على ح ∴ د متصلة على س = −٢

∴ د (−٢) = د (−٢⁻) = د (−٢⁺)

، $\lim_{\text{س} \to -٢^+}$ (ﻣ س + ب) = ٣×−٢ −٢ ∴ −٢ ﻣ + ب = −٨ --- (١)

الدالة متصلة عند س = ٥

∴ $\lim_{\text{س} \to ٥^-}$ (ﻣ س + ب) = (٥)^٢ −١٢ ∴ ٥ ﻣ + ب = ١٣ --- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ﻣ = ٣ ، ب = −٢

تمـــــــارين

(١) أبحث إتصال كل من الدوال الآتية على ح :

١ − د (س) = $\begin{cases} \text{س} + ٢ & ، \text{ س} \leqslant ١ \\ ٥ - ٤ \text{ س} & ، \text{ س} > ١ \end{cases}$

٢ − د (س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ - ١ & ، -٢ \leqslant \text{س} \leqslant ١ \\ ٢ \text{ س} + ١ & ، ١ < \text{س} < ٣ \\ ٣ \text{ س} - ٢ & ، ٣ \leqslant \text{س} < ٦ \end{cases}$

٣ − د (س) = $\begin{cases} ١ + \text{حتا } ٢ \text{ س} & ، ٠ \leqslant \text{س} \leqslant \frac{\pi}{٢} \\ ١ - \text{حا س} & ، \frac{\pi}{٢} < \text{س} < \pi \end{cases}$

٤ − د (س) = $\begin{cases} \text{س} + ٢ & ، \text{ س} \leqslant ٠ \\ \dfrac{\text{س} + \text{طا } ٣ \text{ س}}{٣\text{س} - \text{حا س}} & ، \text{ س} > ٠ \end{cases}$

(٢) أوجد قيمة ك التى تجعل الدالة د متصلة على ح حيث :

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س - ٣٢}{س^٢ - ٤} & ، \quad س \leqslant ٢ \\ ك س^٢ - ٤ & ، \quad س > ٢ \end{cases}$$

(٣) إذا كانت الدالة $د(س) = \begin{cases} ٢ س^٢ - ١ & ، \quad س \leqslant ١ \\ ٩ س + ب & ، \quad ١ < س < ٣ \\ \dfrac{٢ س^٢ - س - ١}{س^٢ - ٢ س + ٤} & ، \quad س \geqslant ٣ \end{cases}$

متصلة على ح أوجد قيمة كل من : ٩ ، ب

(٤) أوجد قيمة ك التى تجعل الدالة د متصلة على ح حيث :

$$د(س) = \begin{cases} ٣ س + ك & ، \quad س \leqslant ٢ \\ ١ - ك س^٢ & ، \quad س > ٢ \end{cases}$$

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

مذكرة
حساب المثلثات
الصف الثانى الثانوى

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

القسم العلمى

الفصل الدراسى الأول ٢٠٢٠

- قانون الجيب
- قانون جيب التمام
- حل المثلث

(١) إذا علم قياسا زاويتين وطول ضلع

(٢) إذا علم طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة

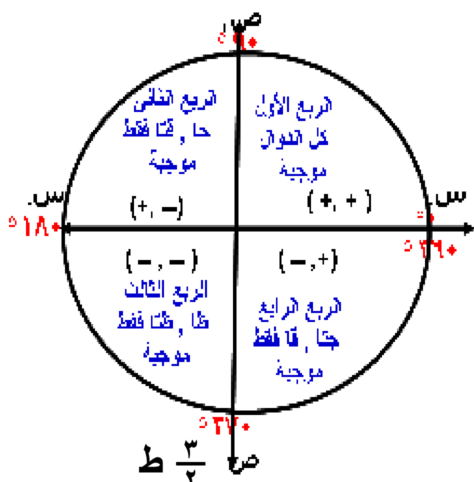
(٣) إذا علم أطوال أضلاعه الثلاثة

(٤) طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لإحداهما (الحالة المبهمة)

مراجعة ما سبق دراسته

إشارات الدوال المثلثية

كما هو مبين في الشكل و يجب قبل تحديد إشارة الدالة المثلثية تحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية



الربع	الزاوية هـ	إشارة جا ، قتا	إشارة جتا ، قا	إشارة ظا ، ظتا
الربع الأول	] ٠ ، ٩٠° [	+	+	+
الربع الثانى	] ٩٠° ، ١٨٠° [	+	‒	‒
الربع الثالث	] ١٨٠° ، ٢٧٠° [	‒	‒	+
الربع الرابع	] ٢٧٠° ، ٣٦٠° [	‒	+	‒

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

الدالة	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠° ، صفر°
حـا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	صفر	ـ ١	صفر
حتـا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$	صفر	ـ ١	صفر	١
طـا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرف	صفر	غير معرف	صفر

بعض خواص الدوال المثلثية :-

[١] العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين المتتامتين [هـ ، ٩٠° - هـ]

(١) حا هـ = حتا (٩٠° ـ هـ) ،،،، قتاهـ = قا(٩٠° ـ هـ)

(٢) حتا هـ = حا(٩٠° ـ هـ) ،،،، قا هـ = قتا (٩٠° ـ هـ)

(٣) ظا هـ = ظتا(٩٠° ـ هـ) ،،،، ظتا هـ = ظا (٩٠° ـ هـ)

ملاحظة : إذا كان حا س = حتا ص

∴ س + ص = ٩٠° حيث س ، ص قياسا زاويتين حادتين موجبتين

[٢]العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين المتكاملتين [هـ ، ١٨٠° - هـ]

الزاوية (١٨٠° ـ هـ) تقع فى الربع الثانى (جا ، قتا) فقط موجبة

(١) جا (١٨٠° ـ هـ) = جا هـ

(٢) جتا (١٨٠° ـ هـ) = ـ جتا هـ

(٣) ظا (١٨٠° ـ هـ) = ـ ظا هـ

[٣] العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين[هـ ، ١٨٠° + هـ]

الزاوية (١٨٠ + هـ) تقع فى الربع الثالث (ظا ، ظتا) فقط موجبة

(١) جا (١٨٠° + هـ) = ـ جا هـ

(٢) جتا (١٨٠° + هـ) = ـ جتا هـ

(٣) ظا (١٨٠° + هـ) = ظا هـ

[٤] العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين[هـ ، ٣٦٠° - هـ] أ، [هـ ، ـ هـ]

الزاوية (٣٦٠° ـ هـ) تقع فى الربع الرابع (جتا ، قا) فقط موجبة

(١) جا (٣٦٠° ـ هـ) = ـ جا هـ

(٢) جتا (٣٦٠° ـ هـ) = جتا هـ

(٣) ظا (٣٦٠° ـ هـ) = ـ ظا هـ

فمثلاً (١) جا ١٢٠° فى الربع الثانى = جا (١٨٠ ـ ٦٠) = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

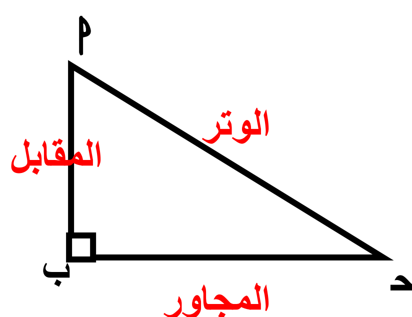
(٢) جتا ٢١٠° فى الربع الثالث = جتا (١٨٠ + ٣٠) = ـ جتا ٣٠° = ـ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٣) ظا ١٥٠° فى الربع الثانى = ظا (١٨٠ ـ ٣٠) = ـ ظا ٣٠° = ـ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(٤) قا ٣٠٠° فى الربع الرابع = قا (٣٦٠ ـ ٦٠) = قا ٦٠° = ٢

(٥) قتا (ـ ٦٠°) فى الربع الرابع = ـ قتا ٦٠° = $\frac{2}{\sqrt{3}}$

الدوال المثلثية للزوايا الحادة المرسومة فى Δ ٩ ب جـ قائم فى ب



يكون حا جـ = ٩ب / ٩جـ (مقابل / وتر) | قتا جـ = ٩جـ / ٩ب (وتر / مقابل)

،، حتا جـ = ب جـ / ٩جـ (مجاور / وتر) | قا جـ = ٩جـ / ب جـ (وتر / مجاور)

،، طا جـ = ٩ب / ب جـ (مقابل / مجاور) | ظتا جـ = ب جـ / ٩ب (مجاور / مقابل)

معنى حل المثلث : المثلث يتكون من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا المقصود بحل المثلث هو معرفة أطوال أضلاعه وقياس زواياه ويستلزم معرفة قياس ثلاث عناصرمن عناصره الست بشرط أن يكون أحد هذه العناصر الثلاث هو طول أحد الأضلاع

***العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية :**

(١) حتا٢هـ + حا٢هـ = ١ ، ١ + طا٢هـ = قا٢هـ ، ١ + ظتا٢ هـ = قتا٢ هـ

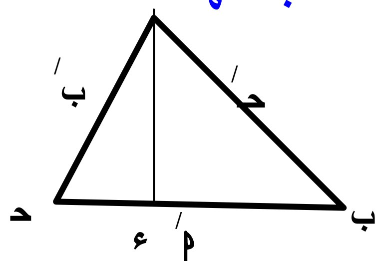
(٢) حا هـ قتا هـ = ١ ، حتا هـ قا هـ = ١ ، طا هـ ظتا هـ = ١

(٣) طا هـ = حا هـ / حتا هـ ، ظتا هـ = حتا هـ / حا هـ

قانون الجيب (قاعدة الجيب)

في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

أي أنه : في أي مثلث أ ب جـ يكون :



$$\frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}}$$

حيث الرموز : أ ، ب ، جـ تعبر عن قياسات زوايا المثلث أ ب جـ

، أ/ ، ب/ ، جـ/ تعبر عن أطوال الأضلاع ب جـ ، أ جـ ، أ ب على الترتيب

البرهان :

مساحة △ أ ب جـ = ½ × ب جـ × أ ء ،

∵ أ ء = جـ/ جا ب (من مساحة △ أ ب ء)

∴ مساحة △ أ ب جـ = ½ × ب/ جـ/ جا أ = ½ × أ/ جـ/ جا ب = ½ × أ/ ب/ جا جـ

بالضرب × ٢ ثم القسمة على أ/ ب/ جـ/ ينتج المطلوب

$$\frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}}$$

ملاحظات :

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه = أ/ + ب/ + جـ/

مساحة المثلث = ½ × طول القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث = ½ × حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

مساحة المثلث = ½ × أ/ ب/ جا جـ = ½ × ب/ جـ/ جا أ = ½ × أ/ جـ/ جا ب

محيط الدائرة = ٢ ط نق & مساحة الدائرة = ط نق^{2}

أكبر ضلع في المثلث يقابل أكبر زاوية في المثلث

أصغر ضلع في المثلث يقابل أصغر زاوية في المثلث

مثـ ١ ـال : في المثلث ٩ ب جـ إذا كان ٩/ = ١٠ سم ، ق(∠ب) = ٤٥° ، ق(∠جـ) = ٦٠°
فأوجد قيمة كل من ب/ ، جـ/ ومساحة المثلث ٩ ب جـ لأقرب رقم عشري

الحـــــــــــــــل

∵ ق(∠٩) = ١٨٠° − (٤٥ + ٦٠) = ٧٥°

∴ $\frac{\text{٩/}}{\text{جا ٩}} = \frac{\text{ب/}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{جـ/}}{\text{حا حـ}}$ ∴ $\frac{\text{١٠}}{\text{جا ٧٥}} = \frac{\text{ب/}}{\text{حا ٤٥}} = \frac{\text{جـ/}}{\text{حا ٦٠}}$

∴ ب/ = $\frac{\text{١٠ × حا ٤٥}}{\text{جا ٧٥}}$ = ٧,٤ سم

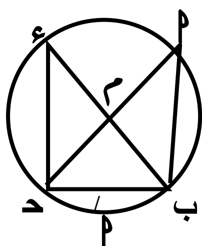
، جـ/ = $\frac{\text{١٠ × حا ٦٠}}{\text{جا ٧٥}}$ = ٩ سم

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ا/ × ب/ جا جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٧,٤ × جا ٦٠° = ٣٢ سم^{٢}

تمرين مشهور

في أي مثلث ٩ ب جـ يكون :

∴ $\frac{\text{٩/}}{\text{جا ٩}} = \frac{\text{ب/}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{جـ/}}{\text{حا حـ}}$ = ٢ نق



حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث ٩ ب جـ

البرهان :

نرسم الدائرة م المارة برؤوس Δ ٩ ب حـ
ثم نرسم القطر ب ء ، الوتر حـ ء
فيكون : ق(∠ب حـ ء) = ٩٠° " محيطية مرسومة فى نصف دائرة "
، ق(∠٩) = ق(∠ء) " محيطيتان تحصران نفس القوس "

في Δ ء ب حـ : حا ء = $\frac{\text{٩/}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{٩/}}{\text{٢ نق}}$ ∴ حا ٩ = $\frac{\text{٩/}}{\text{٢ نق}}$

∴ $\frac{\text{٩/}}{\text{حا ٩}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{\text{٩/}}{\text{حا ٩}} = \frac{\text{ب/}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حـ/}}{\text{حا حـ}}$ = ٢ نق

نتائج هامة

٩/ = ٢ نق جا ٩ & ب/ = ٢ نق جاب & جـ/ = ٢ نق جا جـ

جا ا = $\frac{\text{٩/}}{\text{٢ نق}}$ & جا ب = $\frac{\text{ب/}}{\text{٢ نق}}$ & جا جـ = $\frac{\text{حـ/}}{\text{٢ نق}}$

ملاحظة هامة : تستخدم كل من قاعدة الجيب والتمرين المشهور إذا علم :

- قياسا زاويتين وطول ضلع
- قياسا زاويتين وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث
- قياسا زاويتين وطول محيط المثلث

مثــ٢ــال: في المثلث ٢ ب جـ إذا كان ٢ َ = ١٠سم ، ق(∠ب) = ٤٥° ، ق(∠جـ) = ٦٠°
فأوجد محيط الدائرة الخارجة للمثلث ٢ ب جـ

الحـــــــــــل

∵ ق(∠٢) = ١٨٠ – (٤٥° + ٦٠°) = ٧٥°

∴ ٢َ / جا ٢ = بَ / جا ب = جـَ / جا جـ = ٢ نق

∴ ١٠ / جا ٧٥ = بَ / جا ٤٥ = جـَ / جا ٦٠ = ٢ نق

∴ ٢ نق = ١٠ / جا ٧٥ = ١٠,٣ سم   ∴ نق = ٥,٢ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ × ط × ٥,٢ = ٣٢,٥ سم

مثـ٣ـــال: إذا كان مقاييس زوايا مثلث تتناسب مع ١ : ٢ : ٣ فأثبت أن أطوال الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا تتناسب مع ١ : $\sqrt{3}$: ٢

الحـــــــــــل

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(∠٢) = ١٨٠ × ١/٦ = ٣٠°

∴ ق(∠ب) = ١٨٠ × ٢/٦ = ٦٠°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ × ٣/٦ = ٩٠°

∵ ٢َ / جا ٢ = بَ / جا ب = جـَ / جا جـ

∴ ٢َ : بَ : جـَ = جا ٢ : جا ب : جا جـ = جا ٣٠° : جا ٦٠° : جا ٩٠°

= ١/٢ : $\sqrt{3}$/٢ : ١ = ١ : $\sqrt{3}$: ٢

مثـ٤ ـال: ل م ن مثلث فيه كان ، ق(∠ل) = ٥٢َ ٣٨ْ ، ق(∠ن) = ١٧َ ٤٤ْ ، م/ = ٣٥٢,٧ فأوجد م ن ،، ل م

الحــــــــــــــل

∵ ق(∠م) = ١٨٠ْ − (٥٢َ ٣٨ْ + ١٧َ ٤٤ْ) = ٥١َ ٩٦ْ

$$\therefore \frac{\text{م}'}{\text{جا م}} = \frac{\text{ل}'}{\text{جا ل}} = \frac{\text{ن}'}{\text{جا ن}}$$

$$\therefore \frac{\text{٣٥٢,٧}}{\text{جا ٥١َ ٩٦ْ}} = \frac{\text{ل}'}{\text{جا ٥٢َ ٣٨ْ}} = \frac{\text{ن}'}{\text{جا ١٧َ ٤٤ْ}}$$

$$\therefore \text{م ن} = \text{ل}' = \frac{\text{٣٥٢,٧} \times \text{جا ٥٢َ ٣٨ْ}}{\text{جا ٥١َ ٩٦ْ}} = \text{٢٢٢,٩}$$

$$\therefore \text{ل م} = \text{ن}' = \frac{\text{٣٥٢,٧} \times \text{جا ١٧َ ٤٤ْ}}{\text{جا ٥١َ ٩٦ْ}} = \text{٢٤٨}$$

مثـ٥ ـال: إذا رمزنا لمساحة سطح المثلث أ ب جـ بالرمز Δ فأثبت أن

$$\Delta = \frac{\text{أ}'\,\text{ب}'\,\text{جـ}'}{\text{٤ نق}} = \text{٢ نق}^2 \text{ جا أ جا ب جا جـ}$$

حيث : نق طول نصف قطر الدائرة

الحــــــــــــــل

$$\because \Delta = \tfrac{1}{2}\,\text{ب}'\,\text{جـ}'\ \text{جا أ} \qquad \because \frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \text{٢ نق} \qquad \therefore \text{جا أ} = \frac{\text{أ}'}{\text{٢ نق}}$$

$$\therefore \Delta = \tfrac{1}{2}\,\text{ب}'\,\text{جـ}' \frac{\text{أ}'}{\text{٢ نق}} = \frac{\text{أ}'\,\text{ب}'\,\text{جـ}'}{\text{٤ نق}} \qquad [١]$$

$$\because \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}} = \text{٢ نق} \qquad \therefore \text{ب}' = \text{٢ نق جا ب} \quad ، \quad \text{جـ}' = \text{٢ نق جا جـ}$$

$$\therefore \Delta = \tfrac{1}{2} \times \text{٢ نق جا ب} \times \text{٢ نق جا جـ} \times \text{جا أ} = \text{٢ نق}^2 \text{ جا ب جا جـ جا أ}$$

مثـ٦ ـال: أ ب حـ مثلث فيه جا أ : جا ب : جا جـ = ٩ : ٢ : ٤

أوجد أطوال أضلاعه إذا علم أن محيطه = ٤٥ سم

الحــــــــــــــل

$$\because \frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}} = \text{م}$$

∴ $\frac{أ'}{٩} = \frac{ب'}{٢} = \frac{جـ'}{٤} = م$ ∴ أ' = ٩ م ، ب' = ٢ م ، جـ' = ٤ م

∴ $\frac{أ'}{٩} = \frac{ب'}{٢} = \frac{جـ'}{٤} = \frac{أ' + ب' + جـ'}{٩ + ٢ + ٤} = م$ ، حيث $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$ = أحدى النسب

∴ $\frac{أ'}{٩} = \frac{ب'}{٢} = \frac{جـ'}{٤} = \frac{٤٥}{١٥} = ٣$

∴ أ' = ٩ × ٣ = ٢٧ سم

ب' = ٢ × ٣ = ٦ سم

جـ' = ٤ × ٣ = ١٢ سم

تمـــــــــــارين

١ – ل م ن مثلث فيه ل' = ٢٤ سم ، ق(∠ل) = ٣٧ ° ، ق(∠م) = ١٠٠ ° أوجد لأقرب رقم عشري واحد كل من ن' ، وطول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث

٢ – أ ب جـ مثلث فيه أ' = ٢٠ سم ، ق(∠ب) = ٣٠ ° ، ق(∠جـ) = ٨٠ ° أوجد مساحة المثلث أ ب جـ

٣ – Δ أ ب حـ فيه ق(∠أ) = ٦٠° ؛ ق(∠ب) = ٤٠° طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٢٠ سم أوجد مساحة سطح المثلث لأقرب سم٢

٤ – Δأ ب حـ فيه أ' = ٦سم ؛ ق(∠ب) = ٤٠° ؛ ق(∠حـ) = ٧٥ ° أوجد طول كلا من ب' ؛ $\overline{أ ب}$ قطر الدائرة المارة بروؤس Δ أ ب حـ لأقرب رقم عشري

٥ – أ ب حـ فيه أ' = ١٠سم ؛ ق(∠ب) = ٥٥° ؛ ق(∠حـ) = ٤٠° أوجد طول كلا من حـ' ؛ مساحة (Δ أ ب حـ) ؛ محيط الدائرة المارة بروؤس Δ أ ب حـ لأقرب رقم عشري

٦ – Δ أ ب حـ فيه أ' = ٦سم ؛ ق(∠ب) = ١٢ ' ٤٦° ؛ ق(∠حـ) = ١٨ ' ٧٤° أوجد طول ب لأقرب رقمين عشريين ؛ مساحة الدائرة المارة بروؤس Δ أ ب حـ لأقرب سم٢

٧ – Δ س ص ع فيه ص' = ١٠سم ؛ ق(∠ص) = ١٠٠° ؛ ق(∠ع) = ٣٢° أوجد كلا من مساحة (Δ س ص ع) لأقرب سم٢ ؛ محيط Δ س ص ع لأقرب سم

٨ – Δ أ ب حـ فيه حـ' = ١٩سم ؛ ق(∠ أ) = ١١٢° ؛ ق(∠ب) = ٣٣° أوجد طول كلا من ب

لأقرب سم ؛ نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث لأقرب رقمين عشريين

٩ – ∆ ٲ ب حـ فيه ق(∠ ٲ) = ٦٠° ؛ ق (∠ب) = ٤٠° طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٢٠ سم أوجد مساحة سطح المثلث لأقرب سم٢

١٠ – ∆ٲ ب حـ فيه ٲ/ = ١٢ سم ؛ ٲ حـ = ١٠سم ؛ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٧سم أوجد طول حـ/ لأقرب سم حيث ∆ ٲ ب حـ حاد الزوايا

١١ – ∆ ٲ ب حـ فيه حا حـ = ٢ , ٠ ؛ حـ/ = ١٤سم أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوسه

١٢ –∆ ٲ ب حـ فيه ٲ/ = ٥سم ؛ ق (∠ب) = ١٢٠° ؛ مساحة (∆ ٲ ب حـ) = ١٠$\sqrt{3}$ سم٢ أوجد حـ/

١٣ – دائرة محيطها ٤٤سم تمر برؤوس ∆ ٲ ب حـ الذي فيه ق (∠ ٲ) = ٦٠° أوجد ٲ/

١٤ – دائرة مساحة سطحها ١٥٤سم٢ تمر برؤوس ∆ ٲ ب حـ الذي فيه ٲ ب = ب حـ ؛ ق (∠ب) = ٧٠° أوجد ٲ/

١٥ – دائرة طول نصف قطرها ١٠سم تمر برؤوس ∆ ٲ ب حـ الذي فيه ق (∠ ٲ) = ٢٧° ؛ ق (∠حـ) = ٥٢° أوجد محيط ∆ٲ ب حـ

١٦ – ∆ ٲ ب حـ فيه ق (∠ ٲ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ١ :٣ :٥ فإذا كان ٲ/ = ١٨,٣ سم أوجد محيط ∆ ٲ ب حـ لأقرب سم

١٧ – ∆ س ص ع فيه ق (∠ س) : ق (∠ ص) : ق (∠ ع) = ١ : ٢ : ٣ إثبت أن : س/٢ : ص/٢ : ع/٢ = ١ : ٣ : ٤

١٨ – ∆ ٲ ب حـ فيه ٲ/ = ٨ سم إثبت أن : ـ مساحة (∆ ٲ ب حـ) = $\frac{\text{٢ب/ حـ/}}{\text{نق}}$ حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن ∆ٲ ب حـ

١٩ – ∆ س ص ع قائم الزاوية في ص ، ق (∠ ع) = ٣٠° إثبت أن مساحته = $\sqrt{3}$ نق

٢٠ – في ∆ ٲ ب حـ إثبت أن : ـ مساحة (∆ ٲ ب حـ) = ٢ نق٢ حا ٲ حاب حا حـ

٢١ – Δ ؟ ب حـ محيطه ١٦سم ؛ ق (∠ ؟) = ٥٠° ؛ ق (∠ ب) =٥٦° أوجد ب/ ، حـ/

٢٢ – Δ ؟ ب حـ محيطه ١٢ سم ؛ ق (∠ ؟) =٤٧° ؛ ق (∠ ب) = ٥٣° أوجد ب/

٢٣ – Δ ؟ ب حـ فيه ب حـ = ٥٥سم ، ق (∠ حـ) =٢٧° ، ق (∠ ؟) = ٢٩° أوجد طول مسقط ؟ ب علي ب حـ ؛ طول العمود المرسوم من ؟ علي ب حـ لأقرب سم

٢٤ – Δ ؟ ب حـ فيه ؟/ = ١٠سم ، ق (∠ ب) =٥٠° ، ق (∠ حـ) =٦٠° أوجد طول كلا من نصفي قطري الدائرتين الخارجة والداخلة للمثلث ؟ ب حـ

٢٥ – ؟ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ؟ ب = ١٨سم ؛ ق (∠ حـ ؟ ب) = ٣٦° ، ق (∠ ء ب ؟) = ٤٤° أوجد طول قطره ؟ حـ ؛ مساحة سطح متوازي الأضلاع ؟ ب حـ ء لأقرب وحدة

٢٦ – ؟ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ؟ حـ = ٢٠ سم ؛ ق (∠ ب ؟ م) =٣٨° حيث م نقطة تقاطع قطريه؛ ق (∠ ؟ ب م) =٦٢ أوجد طول كلا من ؟ ب ؛ ب ء

٢٧ – ؟ ب حـ ء شبه منحرف فيه ؟ ء // ب حـ ؛ ؟ ء = ١٥ سم ؛ ق (∠ ء) =١٠٠° ؛ ق (∠ ب) = ٦٥° ؛ ق (∠ ؟ حـ ب) =٣٢° أوجد طول كلا من ؟ جـ ، ب حـ لأقرب سم ، مساحة سطح شبه المنحرف ؟ ب حـ ء لأقرب سم؟

٢٨ – ؟ ب حـ ء شكل رباعي دائري حيث ؟ ب قطر الدائرة المارة برؤوسه وطول نصف قطرها ٧سم ، ق (∠ حـ ؟ ب) =٢٠° ، ق (∠ ؟ ب ء) =٤٠° أوجد مساحة سطح الشكل ؟ ب حـ ء

٢٩ – ؟ ب حـ ء هـ مخمس منتظم طول ضلعه ١٨سم أوجد طول قطره لأقرب سم

٣٠ – ؟ ب جـ متساوي الساقين فيه ق (∠ ؟) = ١٢٠° ،وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ٢٠ سم أوجد ب/ ، ثم استنتج مساحة المثلث لأقرب سم؟

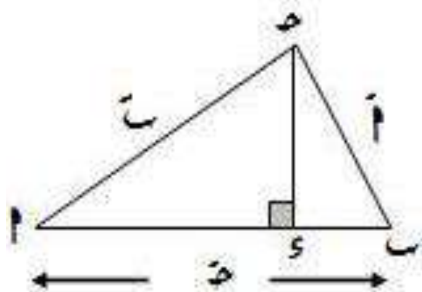
قانون جيب التمام (قاعدة جيب التمام)

في Δ ﻫ ب حـ يكون :

ﻫ/٢ = ب/٢ + حـ/٢ – ٢ ب/ حـ/ حتا ﻫ

ب/٢ = ﻫ/٢ + حـ/٢ – ٢ ﻫ/ حـ/ حتا ب

حـ/٢ = ﻫ/٢ + ب/٢ – ٢ ﻫ/ ب/ حتا حـ



البرهــــــــــــان

∵ Δ حـ ء ب قائم الزاوية فى ء

∴ ﻫ/٢ = (ب حـ)٢ = (ء حـ)٢ + (ء ب)٢ ، ∵ ء ب = ب ﻫ – ء ﻫ

∴ ﻫ/٢ = (حـ ب)٢ = (ء حـ)٢ + (ب ﻫ – ء ﻫ)٢

= (ء حـ)٢ + (ب ﻫ)٢ + (ء ﻫ)٢ – ٢ ب ﻫ × ء ﻫ

، ∵ Δ حـ ء ﻫ قائم الزاوية فى ء ∴ (حـ ﻫ)٢ = (ء حـ)٢ + (ء ﻫ)٢

، حتا ﻫ = ء ﻫ / حـ ﻫ ∴ ء ﻫ = حـ ﻫ حتا ﻫ

∴ ﻫ/٢ = (حـ ﻫ)٢ + (ب ﻫ)٢ – ٢ حـ ﻫ × ب ﻫ حتا ﻫ

∴ ﻫ/٢ = ب/٢ + حـ/٢ – ٢ ب/ حـ/ حتا ﻫ

إذا علمت أطوال أضلاع مثلث أو النسبة بينها		إذا علم طولا ضلعين فى مثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما
حتا ﻫ = (ب/٢ + حـ/٢ – ﻫ/٢) / (٢ ب/ حـ/)	ومنها	• ﻫ/٢ = ب/٢ + حـ/٢ – ٢ ب/ حـ/ حتا ﻫ
حتا ب = (ﻫ/٢ + حـ/٢ – ب/٢) / (٢ ﻫ/ حـ/)	ومنها	• ب/٢ = ﻫ/٢ + حـ/٢ – ٢ ﻫ/ حـ/ حتا ب
حتا حـ = (ﻫ/٢ + ب/٢ – حـ/٢) / (٢ ﻫ/ ب/)	ومنها	• حـ/٢ = ﻫ/٢ + ب/٢ – ٢ ﻫ/ ب/ حتا حـ

ملاحظات :

• لإيجاد قياس إحدى زوايا مثلث يفضل إستخدام قانون جيب التمام لأنه يحدد نوع الزاوية فإذا كانت حتا ﻫ موجبة كانت ∠ﻫ حادة أما إذا كانت حتا ﻫ سالبة كانت ∠ ﻫ منفرجة

- أكبر زوايا المثلث قياساً تقابل أكبر الأضلاع طولاً ، أصغرها قياساً تقابل أصغر الأضلاع طولاً
- إذا كان : أ/ : ب/ : حـ/ = ٣ : ٤ : ٥ نفرض أن: أ/ = ٣ ل ، ب/ = ٤ ل ، حـ/ = ٥ ل ثم نعوض فى قانون جيب التمام لإيجاد قياسات زوايا Δ أ ب حـ

مثـــال١ : مثلث أ ب حـ فيه أ/ = ١٣سم ، ب/ = ١٥سم ، ق(∠ جـ) =٨٧° أوجد جـ/ لأقرب سم

الحـــــــل

$(\text{حـ}')^{2} = (\text{أ}')^{2} + (\text{ب}')^{2} - ٢\,\text{أ}'\,\text{ب}'\ \text{حتا حـ}$

$= (١٣)^{2} + (١٥)^{2} - ٢ \times ١٣ \times ١٥ \times \text{حتا } ٨٧$

$= ٣٧٤ \qquad \therefore \text{حـ}' = \sqrt{٣٧٤} = ١٩$ سم

مثـــال٢ : أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب جـ الذي فيه أ/ = ٣سم ، ب/ = ٥ سم ، جـ/ = ٧ سم

الحـــــــل

أكبر زاوية هى ∠ جـ لأنها تقابل أكبر الأضلاع طولا : جـ/ = ٧سم

$\text{حتا حـ} = \dfrac{(\text{أ}')^{2} + (\text{ب}')^{2} - (\text{حـ}')^{2}}{٢\,\text{أ}'\,\text{ب}'} = \dfrac{٣^{2} + ٥^{2} - ٧^{2}}{٢ \times ٣ \times ٥} = -\dfrac{١}{٢}$

$\therefore$ ق(∠ جـ) = ١٢٠°

مثـــال٣ : مثلث أ ب حـ فيه $\frac{١}{٢}$ جا أ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا جـ أحسب ق(∠جـ) ؟

الحـــــــل

$\because \dfrac{\text{جا أ}}{٢} = \dfrac{\text{حا ب}}{٣} = \dfrac{\text{حا جـ}}{٤} \quad ، \quad \because \dfrac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \dfrac{\text{ب}'}{\text{حا ب}} = \dfrac{\text{جـ}'}{\text{حا جـ}}$

$\therefore \dfrac{\text{أ}'}{٢} = \dfrac{\text{ب}'}{٣} = \dfrac{\text{جـ}'}{٤} = \text{م} \qquad \therefore \text{أ}' = ٢\text{م} \ ، \ \text{ب}' = ٣\text{م} \ ، \ \text{جـ}' = ٤\text{م}$

$\because \text{حتا حـ} = \dfrac{(\text{أ}')^{2} + (\text{ب}')^{2} - (\text{حـ}')^{2}}{٢\,\text{أ}'\,\text{ب}'} = \dfrac{٤\text{م}^{2} + ٩\text{م}^{2} - ١٦\text{م}^{2}}{٢ \times ٢\text{م} \times ٣\text{م}} = \dfrac{-٣\text{م}^{2}}{١٢\text{م}^{2}}$

$\therefore \text{جتا جـ} = -\dfrac{١}{٤}$ (سالبة) ∴ الزاوية جـ منفرجة وبإستخدام حاسبة الجيب

$\therefore$ ق(∠ جـ) = ٢٨ / ١٠٤°

مثـــ٤ــال : إذا كان طولا ضلعين فى مثلث هما $\sqrt{٣} + ١$ ، $\sqrt{٣} - ١$ والزاوية بينهما قياسها ١٢٠° أوجد بدون الحاسبة طول الضلع الثالث

الحـــــــــــل

بفرض أن : أَ = $\sqrt{٣} + ١$ ، بَ = $\sqrt{٣} - ١$ ، ق($\angle$ جـ) = ١٢٠°

∵ حـَ٢ = أَ٢ + بَ٢ − ٢ أَ بَ حتا حـ

= $(\sqrt{٣}+١)^٢ + (\sqrt{٣}-١)^٢ - ٢ \times (\sqrt{٣}+١)(\sqrt{٣}-١) \times$ حتا ١٢٠°

= ٤ + $٢\sqrt{٣}$ + ٤ − $٢\sqrt{٣}$ − ٤ × $(-\frac{١}{٢})$ = ١٠

∴ جـَ٢ = ١٠ ∴ طول الضلع الثالث = جـَ = $\sqrt{١٠}$

مثـــ٥ــال : مثلث أ ب حـ فيه أَ = ٥سم ، مساحة سطحه = $١٠\sqrt{٣}$ سم٢ ، ق($\angle$ ب) = ١٢٠° أوجد جـَ ، بَ لأقرب سم ثم أوجد ق($\angle$ أ)

الحـــــــــــل

∵ مساحة سطح Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أَ جـَ جا ب

$١٠\sqrt{٣} = \frac{١}{٢} \times ٥ \times$ جـَ × جا ١٢٠°

∴ $١٠\sqrt{٣} = \frac{١}{٢} \times ٥ \times$ جـَ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جـَ = $١٠\sqrt{٣} \div \frac{٥\sqrt{٣}}{٤}$ = ٨ سم

∵ بَ٢ = أَ٢ + جـَ٢ − ٢ أَ جـَ حتا ب

بَ٢ = (٥)٢ + (٨)٢ − ٢ × ٥ × ٨ × حتا ١٢٠°

بَ٢ = ١٢٩ ∴ بَ = $\sqrt{١٢٩}$ = ١١,٣٦ سم

∵ $\angle$ ب منفرجة ∴ $\angle$ أ حادة

∵ $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب} = \frac{جـَ}{جا جـ}$ ∴ $\frac{٥}{جا أ} = \frac{١١,٣٦}{جا ١٢٠°}$

∴ جا أ = $\frac{٥ \times جا ١٢٠°}{١١,٣٦}$ بإستخدام الحاسبة ∴ ق($\angle$ أ) = ٢٤ ٢٢°

مثـــال٦ : في المثلث ٩ ب جـ فيه ٩/ = ١٥سم ، ب/ = ٢٥ سم ، جـ/ = ٣٥ سم
أثبت أن جـ هى قياس أكبر زاوية فى المثلث وأنها تحقق العلاقة :
جتا حـ - ٥ $\sqrt{٣}$ جا جـ + ٨ = صفر

الحـــــــــــل

أكبر زاوية هى ∠ جـ لأنها تقابل أكبر الأضلاع طولا : جـ/ = ٧سم

$$\text{جتا حـ} = \frac{٩^{/٢} + ب^{/٢} - حـ^{/٢}}{٢ \ ٩^{/} ب^{/}} = \frac{(١٥)^٢ + (٢٥)^٢ - (٣٥)^٢}{٢ \times ١٥ \times ٢٥} = - \frac{١}{٢}$$

∴ ق (∠ جـ) = ١٢٠°

∴ الطرف الأيمن = جتا ١٢٠° - ٥ $\sqrt{٣}$ جا ١٢٠° + ٨

$$= \frac{-١}{٢} - ٥ \sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٨ = -٠,٥ - ٧,٥ + ٨ = \text{صفر}$$

تمـــــــــارين

١ - △ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ١٣سم ، ب/ = ١٤سم ، حـ/ = ١٥سم أوجد ق (∠ ٩)

٢ - △ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ١٧سم ، ب/ = ١٤سم ، حـ/ = ١٥سم أوجد قياس أصغر زواياه

٣ - △ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ١٢ سم ، ب/ = ١٣سم ، حـ/ = ١٠سم أوجد ق (∠ ٩) ثم
أحسب طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه لأقرب سم

٤ - △ س ص ع فيه س/ = ١٥سم ، ص/ = ١٢ سم ، ق (∠ ع) = ٨٧° أوجد ع/ لأقرب سم

٥ - △ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ١٠سم ، ب/ = ١٦سم ، ق (∠ حـ) = ٦٠° أوجد حـ/ لأقرب سم
ثم أحسب مساحة (△ ٩ ب حـ) لأقرب سم٢

٦ - △ ٩ ب حـ فيه جتا ٩ = $\frac{٢}{٣}$ ، ب/ = ١٦سم ، حـ/ = ١٢ سم إثبت أنه متساوي الساقين

٧ - △ ٩ ب حـ فيه ٩/ : ب/ : حـ/ = ١: ٣ : ١ أوجد قياس أكبر زواياه

٨ - △ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ٢ ب/ جتا حـ إثبت أن △ ٩ ب حـ متساوي الساقين

٩ - △ س ص ع فيه ص ع = ١٤سم ، ق (∠ ص) = ٦٠° ، مساحة (△ س ص ع) = ٤٩ $\sqrt{٣}$ سم
أوجد محيط △ س ص ع لأقرب سم

١٠ - △ س ص ع فيه س/ = ٤سم ، ص/ = ٥سم ، ع/ = ٦سم أوجد طول العمود المرسوم من رأس
اكبر زاوية للمثلث علي الضلع المقابل لأقرب رقم عشري

١١- △ س ص ع أوجد قياس أكبر زواياه إذا علم أن أطوال ارتفاعاته هي ١٢ سم ، ١٥سم ، ٢٠ سم

١٢ – Δ ﻡ ب حـ فيه ب حـ = ٢٠ سم ، ق (∠ ب) = ٢٩° ، ق (∠ حـ) = ٣٧° ، ء منتصف ب حـ
أوجد طول كلا من ﻡ ب ، ﻡ ء لأقرب رقم عشري

١٣ – Δ س ص ع فيه ٤حاس = ٣حاص = ٢ حا ع أوجد قياس أكبر زواياه

١٤ – Δ س ص ع فيه ق(∠ ص) = ٦٠° ، س/ = ٢ ع/ أوجد ق (∠ ع) ، ق (∠ س)

١٥ – Δ ﻡ ب حـ فيه ب/٢ = (حـ/ - ﻡ/)٢ + حـ/ ﻡ/ أوجد ق (∠ ب)

١٦ – ﻡ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ﻡ حـ = ١٦سم ، ب ء = ٢٠سم ، ق (∠ ﻡ م ب) = ٥٤°
حيث م نقطة تقاطع القطرين أوجد طول ﻡ ء لأقرب سم

١٧ – ﻡ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ﻡ ب = ١٦سم ، ب ء = ٢٥ سم ، ب حـ = ١٨سم أوجد
طول ﻡ حـ لأقرب رقم عشري ، ق (∠ ب ﻡ حـ)

١٨ – ﻡ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ﻡ ب = ٨ سم ، ب ء = ٩ سم ، ب حـ = ١١ سم أوجد
طول ﻡ حـ لأقرب سم ، مساحة متوازي الأضلاع ﻡ ب حـ ء لأقرب سم٢

١٩ – ﻡ ب حـ ء شكل رباعي فيه ﻡ ب = ١٨سم ، ب حـ = ١٠ سم ، ء حـ = ١٦ سم ،
ء ﻡ = ١٨سم ، ﻡ حـ = ٢٢ سم إثبت أن الشكل ﻡ ب جـ ء رباعي دائري

٢٠ – ﻡ ب حـ ء شكل رباعي فيه ﻡ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٧ سم ، ء حـ = ٥ سم ، ء ب =٨ سم
، ﻡ حـ = ٨ سم إثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

٢١ – ﻡ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ق ∠ (ب) = ١٢٠° ، محيطه = ١٦سم ، طول القطر الأكبر
= ٧ سم أوجد طول كلا من ﻡ ب ، ب حـ لأقرب سم

٢٢ – ﻡ ب حـ ء شكل رباعي فيه ﻡ ء = ٨ سم ، ب ء = ١٠ سم ، ق (∠ ء ﻡ ب) =
ق (∠ ء ب حـ) = ٩٠° ، ق (∠ ء حـ ب) = ٣٠° أوجد طول ﻡ حـ لأقرب سم

٢٣ – ﻡ ب حـ ء شكل رباعي فيه ﻡ ء = ٨ سم ، ب ء = ١٠ سم ، ق (∠ ء ﻡ ب) =
ق (∠ ء ب حـ) = ٦٥° ، ق (∠ ﻡ ب ء) = ٥٠° أوجد ق (∠ ب حـ ء)

٢٤ – Δ س ص ع فيه ء منتصف س ص إثبت أن : (ع س)٢ + (ع ص)٢ = ٢ (ع ء)٢ + ٢ (س ء)٢

٢٥ – ﻡ ب حـ ء متوازي أضلاع إثبت أن : (ﻡ حـ)٢ + (ب ء)٢ = ٢ (ﻡ ب)٢ + ٢ (ب حـ)٢

٢٦ – ﻡ ب حـ فيه ء منتصف ب حـ ، حـ/ = ٥سم ، ب/ = ٦سم ، ﻡ ء = ٤.٣سم أوجد ﻡ/ لأقرب سم

حـــل المثلث

معنى حل المثلث : المثلث يتكون من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا

المقصود بحل المثلث هو معرفة أطوال أضلاعه وقياس زواياه ويستلزم معرفة قياس ثلاث عناصرمن عناصره الست بشرط أن يكون أحد هذه العناصر الثلاث هو طول أحد الأضلاع

الحالة الأولى : حل المثلث إذا علم فيه قياسا زاويتين وطول ضلع

يستخدم قانون الجيب فى حل المثلث متى علم قياسا زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه

فمثلاً فى △ ا ب حـ إذا علم : ق (∠ا) ، ق(∠ب) ، ا/

فيمكن إيجاد ق(∠حـ) حيث : ق(∠حـ) = ١٨٠° – [ق (∠ا) + ق(∠ب)]

ومن قانون الجيب $\frac{ا/}{حا ا} = \frac{ب/}{حا ب} = \frac{حـ/}{حا حـ}$ لإيجاد كلا من : ب/ ، حـ/

حيث : ب/ = $\frac{ا/ \times حاب}{جا ا}$ ،،،، جـ/ = $\frac{ا/ \times حاجـ}{جا ا}$

مثـ ١ ـال: حل △ ا ب حـ الذى فيه ق (∠ا) = ٤٥° ، ق(∠ب) = ٦٠° ، ا/ =١٠سم

الحـــــــــــــل

∵ ق(∠ا) = ١٨٠° – (٤٥° + ٦٠°) = ٧٥°   (١)

∴ $\frac{ا/}{حا ا} = \frac{ب/}{حا ب} = \frac{حـ/}{حا حـ}$ ∴ $\frac{١٠}{حا٧٥°} = \frac{ب/}{حا ٤٥°} = \frac{حـ/}{حا٦٠°}$

∴ ب/ = $\frac{١٠ \times حا ٤٥°}{حا ٧٥°}$ = ٧,٤ سم   (٢)

، جـ/ = $\frac{١٠ \times حا ٦٠°}{جا ٧٥°}$ = ٩ سم   (٣)

مثـ ٢ ـال: حل △ ا ب حـ الذى فيه ق (∠ا) = ٢٠/ ٤١° ، ق(∠ب) = ١٧/ ٥٩° ، ا/ = ٥,٦١٤ سم

الحـــــــــــــل

∵ ق(∠ا) = ١٨٠° – (٢٠/ ٤١° + ١٧/ ٥٩°) = ٢٣/ ٧٩°   (١)

∵ $\frac{ا/}{حا ا} = \frac{ب/}{حا ب} = \frac{حـ/}{حا حـ}$ ∴ $\frac{٥,٦٤١}{حا ٢٠ ٤١} = \frac{ب/}{حا ١٧ ٥٩} = \frac{حـ/}{حا ٢٣ ٧٩}$

∴ ب′ = $\dfrac{٥,٦٤١ \times \text{جا } ٥٩^\circ\ ١٧'}{\text{جا } ٤١^\circ\ ٢٠'}$ = ٧,٣١ سم (٢)

، جـ′ = $\dfrac{٥,٦٤١ \times \text{جا } ٧٩^\circ\ ٢٣'}{\text{جا } ٤١^\circ\ ٢٠'}$ = ٨,٣٥ سم (٣)

مثـ٣ ـال: حل Δ ل م ن فيه ، ق(∠ل) = ٣٨° ٥٢′ ، ق(∠ن) = ٤٤° ١٧′
م′ = ٣٥٢,٧

الحـــــــــــل

∵ ق(∠م) = ١٨٠° − (٣٨° ٥٢′ + ٤٤° ١٧′) = ٩٦° ٥١′ (١)

∴ $\dfrac{\text{م}'}{\text{جا م}} = \dfrac{\text{ل}'}{\text{جا ل}} = \dfrac{\text{ن}'}{\text{جا ن}}$

∴ $\dfrac{٣٥٢,٧}{\text{جا } ٩٦^\circ\ ٥١'} = \dfrac{\text{ل}'}{\text{جا } ٣٨^\circ\ ٥٢'} = \dfrac{\text{ن}'}{\text{جا } ٤٤^\circ\ ١٧'}$

∴ ل′ = $\dfrac{٣٥٢,٧ \times \text{جا } ٣٨^\circ\ ٥٢'}{\text{جا } ٩٦^\circ\ ٥١'}$ = ٢٢٢,٩ (٢)

∴ ن′ = $\dfrac{٣٥٢,٧ \times \text{جا } ٤٤^\circ\ ١٧'}{\text{جا } ٩٦^\circ\ ٥١'}$ = ٢٤٨ (٣)

تمـــــــارين

١ – حل Δ ﺃ ب حـ الذي فيه ﺃ′ = ١٦سم ، ق (∠ب) = ٥٥° ، ق (∠حـ) = ٨٠°

٢ – حل Δ ﺃ ب حـ الذي فيه ﺃ′ = ١٠سم ، ق (∠ب) = ٦٢° ، ق (∠حـ) = ٤٨°

٣ – حل Δ ﺃ ب حـ الذي فيه ب′ = ٢٣ سم ، حـ′ = ٣٧سم ، ق (∠ﺃ) = ٦٠°

٤ – حل Δ ﺃ ب حـ الذي فيه ﺃ′ = ١٦سم ، ب′ = ٢٥ سم ، ق (∠حـ) = ١٠٤° ٣٠′

٥ – حل Δ ﺃ ب حـ الذي فيه ﺃ ب = ﺃ حـ ، ق(∠ﺃ) = ٨٠° ، مساحة سطح الدائرة الخارجة عنه = ١٥٤سم²

٦ – حل Δ ﺃ ب حـ الذي فيه ﺃ′ = ٤ سم ، ق (∠ﺃ) = ٢ ق (∠ب) = ٦٠°
ثم أوجد مساحته

الحالة الثانية : حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

ليكن معلوم فى Δ م ب حـ طولا م/ ، ب/ ، ق(∠حـ)

لذلك نطبق قانون جيب التمام : حـ/٢ = م/٢ + ب/٢ – ٢ م/ ب/ حتا حـ

ومنه نوجد ق (∠م) حيث : حتا م = $\frac{\text{ب}^{/2} + \text{حـ}^{/2} - \text{م}^{/2}}{\text{٢ ب}^{/}\text{ حـ}^{/}}$

ثم نوجد ق(∠ب) حيث : ق(∠ب) = ١٨٠° – [ق (∠م) + ق(∠حـ)]

مثـــال ١ : حل Δ م ب حـ الذى فيه م/ = ١٣سم ، ب/ = ١٥سم ، ق(∠جـ) = ٨٧°

الحـــــــل

حـ/٢ = م/٢ + ب/٢ – ٢ م/ ب/ حتا حـ

= (١٣)٢ + (١٥)٢ – ٢ × ١٣ × ١٥ × حتا ٨٧

∴ حـ/٢ = ٣٧٤ ∴ حـ/ = $\sqrt{٣٧٤}$ = ١٩ سم (١)

حتا م = $\frac{\text{ب}^{/2} + \text{حـ}^{/2} - \text{م}^{/2}}{\text{٢ ب}^{/}\text{ حـ}^{/}}$ = $\frac{١٥^2 + ١٩^2 - ١٣^2}{٢ \times ١٥ \times ١٩}$ ≈ ٠,٧٣١٥

∴ ق (∠م) = ٥٩ /٤٢° (٢)

، ق(∠ب) = ١٨٠° – [٨٧° + ٥٩ /٤٢°] = ٥٠° (٣)

مثـــال ٢ : حل Δ م ب حـ الذى فيه م/ = ٨٠ ، ب/ = ٥٠° ، ق(∠جـ) = ٢/ ٦٠°

الحـــــــل

حـ/٢ = م/٢ + ب/٢ – ٢ م/ ب/ حتا حـ

= (٨٠)٢ + (٥٠)٢ – ٢ × ٨٠ × ٥٠ × حتا ٢/ ٦٠°

∴ حـ/٢ = ٤٩٦٤ ∴ حـ/ = $\sqrt{٤٩٦٤}$ = ٧٠,٤٥٥٧ (١)

وبتطبيق قانون الجيب $\frac{\text{ب}^{/}}{\text{جا ب}}$ = $\frac{\text{جـ}^{/}}{\text{جا جـ}}$ ∴ $\frac{٥٠}{\text{جا ب}}$ = $\frac{٧٠,٤٦}{\text{جا ٢/ ٦٠°}}$

∴ جا ب = $\frac{٥٠ \times \text{جا } ٢ / ٦٠°}{٧٠,٤٦}$ ∴ ق(∠ ب) = ٥٦ / ٣٧° (٢)

∴ ق (∠ ٲ) = ١٨٠° - [٥٦ ٣٧° + ٢ ٦٠°] = ٢ / ٨٢° (٣)

مثـ٣ ـال : حل Δ س ص ع الذى فيه س / = ١٦، ص / = ٢٥ ، ق(∠ ع) =٣٠/ ١٠٤°

الحـــــــــــــــل

ع/٢ = س/٢ + ص/٢ – ٢ س/ ص/ حتا ع

= (١٦)٢ + (٢٥)٢ – ٢ × ١٦ × ٢٥ × حتا ٣٠ ١٠٤°

∴ ع/٢ = ١٠٨١,٣٢ ∴ ع/ = $\sqrt{١٠٨١,٣٢}$ = ٣٢,٨٨ (١)

حتا س = $\frac{ص/^٢ + ع/^٢ - س/^٢}{٢ ص/ ع/}$ = $\frac{٢٥^٢ + ٣٢,٩^٢ - ١٦}{٢ \times ٢٥ \times ٣٢,٩}$ ≈ ٠.٨٨٢٣

∴ ق (∠ س) = ٦/ ٢٨°

، ق(∠ص) = ١٨٠° – [٦/ ٢٨° + ٣٠/ ١٠٤°] = ٢٤/ ٤٧°

تمـــــــارين

١ – حل Δ ٲ ب حـ الذي فيه ٲ/ = ٢٥,٣ سم ، حـ/ = ١٤,٧ سم ، ق (∠ ب) = ١,٢ ءٔ

٢ – حل Δ ٲ ب حـ الذي فيه ٲ ب = ٤٨,٥ سم ، ب حـ = ٤٦ سم ، حتا ب = – ٠,٦

٣ – حل Δ ٲ ب حـ الذي فيه ب حـ = ٣٦ سم ، ٲ ب = ٣٠ سم ، ق (∠ ب) = ١٠/ ٧٨°

ثم أوجد الإرتفاع المرسوم من ب على $\overline{ٲ حـ}$

٤ – حل Δ ٲ ب حـ الذي فيه ٲ/ = ٢١ سم ، حتا ب = $\frac{٤}{٥}$ ، طا حـ = $\frac{٧}{٢٤}$.

٥ – حل Δ ٲ ب حـ الذي فيه ٲ/ = ١٣ سم ، ق (∠ ٲ) = ٦٠° ومحيطه ٣٥ سم

٦ – حل Δ ٲ ب حـ الذي فيه ٲ/ = ١٣ سم ، ق (∠ ٲ) = ٢٤° ، طول قطر الدائرة المارة

بروؤسه يساوى ٨ سم

الحالة الثالثة : حل المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة

فى Δ أ ب حـ إذا علم : أ/ ، ب/ ، حـ/ نوجد

أولاً : نوجد ق (∠أ) حيث : $$\text{حتا } أ = \frac{\text{ب}'^2 + \text{حـ}'^2 - \text{أ}'^2}{2\ \text{ب}'\ \text{حـ}'}$$

ثانياً : نوجد ق(∠ب) حيث : $$\text{حتا ب} = \frac{\text{أ}'^2 + \text{حـ}'^2 - \text{ب}'^2}{2\ \text{أ}'\ \text{حـ}'}$$

ثالثاً : نوجد ق(∠حـ) حيث : ق(∠حـ) = ١٨٠° - [ق (∠أ) + ق(∠ب)]

مثـــ١ـــال : حل Δ أ ب حـ الذى فيه أ/ = ٥ سم ، ب/ = ٧سم ، حـ/ = ١١ سم

الحـــــــــــــل

$$\text{حتا } أ = \frac{\text{ب}'^2 + \text{حـ}'^2 - \text{أ}'^2}{2\ \text{ب}'\ \text{حـ}'} = \frac{٧^2 + ١١^2 - ٥^2}{٢ \times ٧ \times ١١}$$ ∴ ق (∠أ) = $١٩^\circ\ ٤١'$

$$\text{حتا ب} = \frac{\text{أ}'^2 + \text{حـ}'^2 - \text{ب}'^2}{2\ \text{أ}'\ \text{حـ}'} = \frac{٥^2 + ١١^2 - ٧^2}{٢ \times ٥ \times ١١}$$ ∴ ق (∠ب) = $٢٨^\circ\ ٨'$

ق(∠حـ) = ١٨٠° − [$١٩^\circ\ ٤١'$ + $٢٨^\circ\ ٨'$] = $١٣٢^\circ\ ١١'$

مثـــ٢ـــال : حل Δ أ ب حـ الذى فيه أ/ = ٨ سم ، ب/ = ٥سم ، حـ/ = ٧ سم

الحـــــــــــــل

$$\text{حتا ب} = \frac{\text{حـ}'^2 + \text{أ}'^2 - \text{ب}'^2}{2\ \text{أ}'\ \text{حـ}'} = \frac{٧^2 + ٨^2 - ٥^2}{٢ \times ٧ \times ٨}$$ ∴ ق (∠ب) = $٣٨^\circ\ ١٣'$

$$\text{حتا جـ} = \frac{\text{أ}'^2 + \text{حـ}'^2 - \text{ب}'^2}{2\ \text{أ}'\ \text{حـ}'} = \frac{٨^2 + ٥^2 - ٧^2}{٢ \times ٨ \times ٥}$$ ∴ ق (∠جـ) = ٦٠°

ق(∠حـ) = ١٨٠° − [$٣٨^\circ\ ١٣'$ + ٦٠°] = $٨١^\circ\ ٤٧'$

تمـــــــارين

١ – حل △ ؟ ب حـ الذي فيه ؟/ = ٨ سم ، ب/ = ٥ سم ، حـ/ = ٧ سم

٢ – حل △ ؟ ب حـ الذي فيه ؟/ = ٦ سم ، ب/ = ٩ سم ، حـ/ = ٥ سم

٣ – حل △ ؟ ب حـ الذي فيه ؟ ب : ب حـ : ؟ حـ = ٤ : ٥ : ٧ ومحيطه ٤٨ سم

الحالة الرابعة : حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لإحداهما (الحالة المبهمة)

فى △ ؟ ب حـ إذا علم ؟/ ، ب/ ، ق (∠ ؟) نوجد قيمة ع = ب/ جا؟ ونلاحظ

أولاً : إذا كانت ∠ ؟ حادة وكان				ثانياً: إذا كانت ∠ ؟ قائمة أو منفرجة وكان	
١	إذا كان: ؟/ < ع فإنه لا يمكن رسم مثلث	٢	إذا كان: ؟/ = ع فإنه يمكن رسم مثلث وحيد قائم الزاوية	١	إذا كان: ؟/ ≤ ب/ فإنه لا يمكن رسم مثلث
٣	إذا كان: ع < ؟/ < ب/ فإنه يمكن رسم مثلثان	٤	إذا كان: ؟/ ≥ ب/ فإنه يمكن رسم مثلث وحيد	٢	إذا كان: ؟/ > ب/ فإنه يمكن رسم مثلث وحيد

مثــ١ـــال : حل △ ؟ ب حـ الذى فيه ؟/ = ٧ سم ، ب/ = ٤ سم ، ق(∠ ؟) = ١١٢°

الحـــــــــــل

∵ ∠ ؟ منفرجة ⟸ ∠ ب حادة ، ؟/ > ب/ ∴ يوجد للمثلث حل وحيد

وبتطبيق قانون الجيب $\frac{؟/}{جا ؟} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ ∴ $\frac{٧}{جا ١١٢°} = \frac{٤}{جا ب}$

∴ جا ب = $\frac{٤ × جا ١١٢°}{٧}$ ∴ ق(∠ ب) = ٣٢° (١)

∴ ق (∠ جـ) = ١٨٠° – [١١٢° + ٣٢°] = ٣٦° (٢)

∴ $\frac{٧}{جا ١١٢°} = \frac{جـ/}{جا ٣٦}$ ∴ جـ/ = $\frac{٧ × جا ٣٦}{جا ١١٢°}$ ∴ جـ/ = ٤,٤٤ سم (٣)

مثـ٢ــال : حل Δ ﻡ ب حـ الذى فيه ﻡ/ = ٩ سم ، ب/ = ١٣ سم ، ق(∠ ﻡ) =٩٨°

الحـــــــــل

∵ ∠ ﻡ منفرجة ، ﻡ/ < ب/ ∴ لا يوجد حل للمثلث

مثـ ٣ــال : حل Δ ﻡ ب حـ الذى فيه ﻡ/ = ٢٠سم ، ب/ = ٢٨ سم ، ق(∠ ﻡ) = ٤٢°

الحـــــــــل

∵ ∠ ﻡ = ٤٢° (حادة) ، ع = ب × جا ﻡ = ٢٨ × جا٤٢ ≃ ١٨,٧

∵ ع < ﻡ/ < ب/ يوجد للمثلث حلان

∴ $\frac{ﻡ/}{جا ﻡ} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ ∴ $\frac{٢٠}{جا ٤٢°} = \frac{٢٨}{ب}$

∴ جا ب = $\frac{٢٨ × جا ٤٢°}{٢٠}$ ∴ق(∠ ب) = ٧٠° ، أ، ق(∠ ب) = ١١٠°

∴ ق (∠ جـ) = ١٨٠° - [٤٢° +٧٠°] = ٦٨° ، أ، ق (∠ جـ) = ٢٨°

∴ $\frac{٢٠}{جا ٤٢°} = \frac{جـ/}{جا ٦٨°}$ ∴ جـ/ = $\frac{٢٠ × جا ٦٨°}{جا ٤٢°}$ ∴ جـ/ ≃ ٢٧,٧ سم

∴ $\frac{٢٠}{جا ٤٢°} = \frac{جـ/}{جا ٢٨°}$ ∴ جـ/ = $\frac{٢٠ × جا ٢٨°}{جا ٤٢°}$ ∴ جـ/ ≃ ١٤ سم

مثـ٤ـال : حل Δ ﻡب جـ الذى فيه ﻡ/ = ٤ ، ب/ = ٣ ، ق(∠ ﻡ) =٥٠°

الحـــــــــل

∵ ∠ ﻡ = ٥٠° (حادة) ، ع = ب × جا ﻡ = ٣ × جا ٥٠ ≃ ٢,٢٩

∵ ﻡ/ > ب/ يوجد حل للمثلث وحيد

وبتطبيق قانون الجيب $\frac{ﻡ/}{جا ﻡ} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ ∴ $\frac{٤}{جا ٥٠°} = \frac{٣}{جا ب}$

∴ جا ب = $\frac{٣ × جا ٥٠°}{٤}$ ∴ق(∠ ب) = ٣٥° ٤/ (١)

∴ ق (∠ جـ) = ١٨٠° - [٥٠° + ٣٥° ٤/] = ٩٤° ٥٦/ (٢)

∴ $\frac{٤}{جا ٥٠°} = \frac{جـ/}{جا ٩٤° ٥٦/}$ ∴ جـ/ = $\frac{٤ × جا ٩٤° ٥٦/}{جا ٥٠°}$ ∴ جـ/ = ٥,٢ سم (٣)

مثـــال : حل Δ ٵ ب حـ الذى فيه ٵ/ = ٥ سم ، ب/ = ٧ سم ، ق(∠ ٵ) = ٦٠°

الحـــــــل

∵ ∠ ٵ = ٦٠° (حادة) ، ع = ب × جا ٵ = ٧ × جا ٦٠ ≃ ٦,١

∵ ٵ/ < ع ∴ لايوجد حل للمثلث

مثـــال : حل Δ ٵ ب جـ الذى فيه ٵ/ = ٤$\sqrt{3}$ ، ب/ = ٦ ، ق(∠ ب) = ٦٠°

الحـــــــل

∵ ∠ ب = ٦٠° (حادة) ، ع = ٵ × جا ب = ٤$\sqrt{3}$ × جا ٦٠ = ٦ سم

∵ ع = ب/ يوجد حل للمثلث وحيد قائم الزاوية

وبتطبيق قانون الجيب $\frac{ٵ/}{جا ٵ} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ ∴ $\frac{٦}{جا ٦٠°} = \frac{٤\sqrt{3}}{جا ٵ}$

∴ جا ٵ = $\frac{٤\sqrt{3} × جا ٦٠°}{٦}$ ∴ ق(∠ ٵ) = ٩٠° (١)

∴ ق(∠ جـ) = ١٨٠° - [٦٠° + ٩٠°] = ٣٠° (٢)

∴ $\frac{٦}{جا ٦٠°} = \frac{جـ/}{جا ٣٠°}$ ∴ جـ/ = $\frac{٦ × جا ٣٠°}{جا ٦٠°}$ ∴ جـ/ = ٣,٥ سم (٣)

تمـــــارين

(١) حل Δ ٵ ب جـ الذى فيه ٵ/ = ١٢ سم ، ب/ = ١٥ ، ق(∠ ٵ) = ١٠٠°

(٢) حل Δ ٵ ب جـ الذى فيه ٵ/ = ١٠ سم ، ب/ = ٩ ، ق(∠ ٵ) = ٥٧°

(٣) حل Δ س ص ع الذى فيه س/ = ٢١ سم ، ص/ = ٢٦ ، ق(∠ س) = ٥٢°

(٤) حل Δ ٵ ب جـ الذى فيه ٵ/ = ٦ سم ، ب/ = ٨ ، ق(∠ ٵ) = ٤٧°

(٥) حل Δ ل م ن الذى فيه ل/ = ١٠ سم ، م/ = ١٨ ، ق(∠ ل) = ٣٥°